Квадратичные уравнения на плоскости

1. Докажите **формулу Стюарта:** если в треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка M, причем $AM = p$, $BM = q$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $CM = x$, то
$$x^2 = \frac{q}{c} \cdot a^2 + \frac{p}{c} \cdot b^2 - p \cdot q\ .$$

2. Для фиксированных точек A, B и фиксированных чисел α, β рассматривается выражение $f(X) = \alpha AX^2 + \beta BX^2$. Докажите, что если $\alpha + \beta \neq 0$, то найдутся точка C, число γ и константа c, такие что $f(X) = \gamma CX^2 + c$ для любой точки X.

3. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — точки плоскости, возможно совпадающие; $k_1, k_2, \ldots, k_n, d$ — произвольные действительные числа. Докажите, что ГМТ X:
$$k_1C_1X^2 + k_2C_2X^2 + \ldots = d$$
   - если $\sum k_i = 0$, то это либо вся плоскость, либо прямая, либо $\emptyset$;
   - если $\sum k_i \neq 0$, то это либо окружность, либо точка, либо пустое множество.

   Приведите примеры, показывающие, что все случаи в задаче 3 возможны.

4. Даны квадратичные уравнения $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$, задающие прямые ℓ_1 и ℓ_2, пересекающиеся в точке O. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку O, задается уравнением вида $k_1f_1(X) + k_2f_2(X) = 0$ при некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются ω_5 внешним образом; при этом ω_1 и ω_3 касаются ω_2 и ω_4 также внешним образом. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных $\ell_{\omega_2\omega_5}$ и $\ell_{\omega_4\omega_5}$ лежит на прямой центров ω_1 и ω_3.

6. **Окружность Аполлония.** Докажите, что ГМТ X: $AX : BX = k$ — окружность $(k \neq 1)$ либо прямая $(k = 1)$.

7. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по его биссектрисе и отрезкам, на которые она делит сторону треугольника.

8. Точки M, N таковы, что $AM : BM : CM = AN : BN : CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

9. Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.

Квадратичные уравнения на плоскости

1. Докажите **формулу Стюарта:** если в треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка M, причем $AM = p$, $BM = q$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $CM = x$, то
$$x^2 = \frac{q}{c} \cdot a^2 + \frac{p}{c} \cdot b^2 - p \cdot q\ .$$

2. Для фиксированных точек A, B и фиксированных чисел α, β рассматривается выражение $f(X) = \alpha AX^2 + \beta BX^2$. Докажите, что если $\alpha + \beta \neq 0$, то найдутся точка C, число γ и константа c, такие что $f(X) = \gamma CX^2 + c$ для любой точки X.

3. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — точки плоскости, возможно совпадающие; $k_1, k_2, \ldots, k_n, d$ — произвольные действительные числа. Докажите, что ГМТ X:
$$k_1C_1X^2 + k_2C_2X^2 + \ldots = d$$
   - если $\sum k_i = 0$, то это либо вся плоскость, либо прямая, либо $\emptyset$;
   - если $\sum k_i \neq 0$, то это либо окружность, либо точка, либо пустое множество.

   Приведите примеры, показывающие, что все случаи в задаче 3 возможны.

4. Даны квадратичные уравнения $f_1(X) = 0$ и $f_2(X) = 0$, задающие прямые ℓ_1 и ℓ_2, пересекающиеся в точке O. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку O, задается уравнением вида $k_1f_1(X)+k_2f_2(X) = 0$ при некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются ω_5 внешним образом; при этом ω_1 и ω_3 касаются ω_2 и ω_4 также внешним образом. Докажите, что точка пересечения общих внутренних касательных $\ell_{\omega_2\omega_5}$ и $\ell_{\omega_4\omega_5}$ лежит на прямой центров ω_1 и ω_3.

6. **Окружность Аполлония.** Докажите, что ГМТ X: $AX : BX = k$ — окружность ($k \neq 1$) либо прямая ($k = 1$).

7. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по его биссектрисе и отрезкам, на которые она делит сторону треугольника.

8. Точки M, N таковы, что $AM : BM : CM = AN : BN : CN$. Докажите, что прямая MN проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

9. Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.