Графы, немного

7-8 классы

1. Существует ли граф, степени вершин которого равны...
   (a) ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
   (b) ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6?
   (c) ... 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6?
   (d) ... 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5?

2. В графе все вершины имеют степень 7. Может ли в этом графе быть ровно...
   (a) ... 100 рёбер?
   (b) ... 105 рёбер?

!! **Лемма о рукопожатиях.** В любом графе нечётных вершин — чётное число.

3. В некоторой стране из столицы выходит 2017 дорог, из города Обзора — одна, а из всех остальных городов — по 50. Докажите, что из Обзора можно добраться до столицы.

4. В некотором городе есть площади и тупики. С каждой площади отходит 5 улиц; из каждого тупика — одна. Всего в городе 49 улиц. Какое наименьшее число тупиков может быть?

5. При каких $n, k \in \mathbb{N}$ существует регулярный граф степени k на n вершинах?

6. Связный граф G нарисован на плоскости. Пусть у него V вершин, E рёбер, F граней. Рассмотрим величину $V - E + F$, обозначим её χ.
   (a) Нарисуйте несколько графов и посчитайте для них величину χ.
   (b) Докажите, что χ будет такая же для любого связного графа на плоскости.

!! **Эйлерова характеристика.** Для любого связного графа на плоскости справедливо $V - E + F = 2$.

7. Пять точек требуется соединить каждую с каждой непересекающимися линиями (не обязательно прямыми). (Этот граф называется K_5.)
   (a) Предположим, что это получилось сделать на поверхности шара.
      i. Каким должно быть число граней?
      ii. Заметьте, что каждая грань ограничена тремя или более рёбрами.
      iii. Выведите, что $3F \leq 2E$ и получите противоречие.
   (b) Вспомните, что это можно сделать на поверхности бублика.

8. Три дома требуется соединить с тремя колодцами (каждый с каждым) непересекающимися дорожками. (Этот граф называется $K_{3,3}$.)
   (a) Предположим, что это получилось сделать на поверхности шара.
      i. Каким должно быть число граней?
      ii. Докажите, что нет треугольных граней.
      iii. Выведите, что $4F \leq 2E$ и получите противоречие.
   (b) Докажите, что это можно сделать на поверхности бублика.