Iranian Geometry Olympiad (Training)

Na Iranskoj olipijadi iz geometrije imaćete 5 zadataka. Vreme za rad će biti 4,5 sata (270 minuta).

Danas ce biti svega dva zadatka i svega 2 sata (120 minuta) za rad. Svi učesnici, koji su dobili srebrnu medalju, uradili su bar jedan od ta dva zadatka, a oni, koji su dobili su zlatnu medalju, uradili su oba zadatka.

Na IGO se rešenja moraju detaljno zapisati. Medjutim, danas rešenja nemojte pisati, nego ih odbranite usmeno. To će vam uštedeti vreme za rad, a odmah ćete znati rezultat.

Srećno!

Elementary Level

IGO 2021, EL, Problem 3 of 5

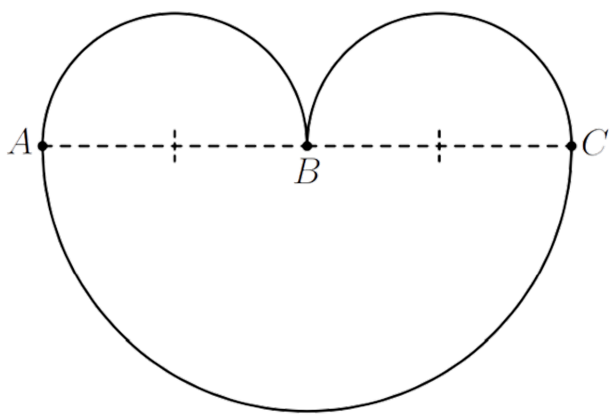
ENG

As shown in the following figure, a *heart* is a shape consisting of three semicircles with diameters AB, BC and AC such that B is midpoint of the segment AC. A heart ω is given. Call a pair (P, P') bisector if P and P' lie on ω and bisect its perimeter. Let (P, P') and (Q, Q') be bisector pairs. Tangents at points P, P', Q, and Q' to ω construct a convex quadrilateral $XYZT$. If the quadrilateral $XYZT$ is inscribed in a circle, find the angle between lines PP' and QQ'.

SRB

Srce je figura koja se sastoji od tri polukružnice sa prečnicima AB, BC i AC takvim da je B sredina duži AC (vidi sliku).

Dato je srce ω. Reći ćemo da je par tačaka (P, P') bisektor ako P i P' pripadaju ω i dele obim ω napola. Neka su (P, P') i (Q, Q') bisektori. Tangente ω u tačkama P, P', Q i Q' čine konveksni četvorougao $XYZT$. Ako je $XYZT$ tetivan, naći ugao medju pravama PP' i QQ'.



IGO 2021, EL, Problem 4 of 5

ENG

In isosceles trapezoid $ABCD$ ($AB \| CD$) points E and F lie on the segment CD in such a way that D, E, F and C are in that order and $DE = CF$. Let X and Y be the reflection of E and C with respect to AD and AF. Prove that circumcircles of triangles ADF and BXY are concentric.

SRB

U jednakokrakom trapezu $ABCD$ ($AB \| CD$) izabrane su tačke E i F na duži CD takve, da D, E, F i C sleduju u tom poretku i važi $DE = CF$. Neka su X i Y tačke simetrične E i C u odnosu na AD i AF. Dokazati da su opisane kružnice trouglova ADF i BXY koncentrične.

Iranian Geometry Olympiad (Training)

Na Iranskoj olipijadi iz geometrije imaćete 5 zadataka. Vreme za rad će biti 4,5 sata (270 minuta).

Danas ce biti svega dva zadatka i svega 2 sata (120 minuta) za rad. Svi učesnici, koji su dobili srebrnu medalju, uradili su bar jedan od ta dva zadatka, a oni, koji su dobili su zlatnu medalju, uradili su oba zadatka.

Na IGO se rešenja moraju detaljno zapisati. Medjutim, danas rešenja nemojte pisati, nego ih odbranite usmeno. To će vam uštedeti vreme za rad, a odmah ćete znati rezultat.

Srećno!

Intermediate Level

IGO 2021, IL, Problem 3 of 5

ENG

Given a convex quadrilateral $ABCD$ with $AB = BC$ and $\angle ABD = \angle BCD = 90°$. Let point E be the intersection of diagonals AC and BD. Point F lies on the side AD such that $AF/FD = CE/EA$. Circle ω with diameter DF and the circumcircle of triangle ABF intersect for the second time at point K. Point L is the second intersection of EF and ω. Prove that the line KL passes through the midpoint of CE.

SRB

U konveksnom četvorouglu $ABCD$ važi $AB = BC$ i $\angle ABD = \angle BCD = 90°$. Neka je E presek dijagonala AC i BD. Tačka F na stranici AD je takva da važi $AF/FD = CE/EA$. Kružnica ω čiji je prečnik DF i kružnica opisana oko trougla ABF preseču se drugi put u tački K. Tačka L je drugi presek EF i ω. Dokazati da prava KL prolazi kroz sredinu CE.

IGO 2021, IL, Problem 4 of 5

ENG

Let ABC be a scalene acute-angled triangle with its incenter I and circumcircle Γ. Line AI intersects Γ for the second time at M. Let N be the midpoint of BC and T be the point on Γ such that $IN \perp MT$. Finally, let P and Q be the intersection points of TB and TC, respectively, with the line perpendicular to AI at I. Show that $PB = CQ$.

SRB

Neka je ABC raznostranični ostrougli trougao sa centrom upisane kružnice I i opisanom kružnicom Γ. Prava AI seče Γ po drugi put u tački M. Neka je N sredina BC, a T tačka na Γ takva da je $IN \perp MT$. Takodje, neka su P i Q tačke preseka redom TB i TC sa pravom normalnom na AI u tački I. Dokazati da je $PB = CQ$.

Iranian Geometry Olympiad (Training)

Na Iranskoj olipijadi iz geometrije imaćete 5 zadataka. Vreme za rad će biti 4,5 sata (270 minuta).

Danas ce biti svega dva zadatka i svega 2 sata (120 minuta) za rad. Svi učesnici, koji su dobili srebrnu medalju, uradili su bar jedan od ta dva zadatka, a oni, koji su dobili su zlatnu medalju, uradili su oba zadatka.

Na IGO se rešenja moraju detaljno zapisati. Medjutim, danas rešenja nemojte pisati, nego ih odbranite usmeno. To će vam uštedeti vreme za rad, a odmah ćete znati rezultat.

Srećno!

Advanced Level

IGO 2021, AL, Problem 3 of 5

ENG

Consider a triangle ABC with altitudes AD, BE, and CF, and orthocenter H. Let the perpendicular line from H to EF intersects EF, AB and AC at P, T and L, respectively. Point K lies on the side BC such that $BD = KC$. Let ω be a circle that passes through H and P, that is tangent to AH. Prove that circumcircle of triangle ATL and ω are tangent, and KH passes through the tangency point.

SRB

Razmotrimo trougao ABC sa visinama AD, BE i CF i ortocentrom H. Neka normala iz H na EF seče EF, AB i AC u P, T i L, redom. Tačka K na stranici BC je takva da važi $BD = KC$. Neka je ω kružnica, koja prolazi kroz H i P i dodiruje AH. Dokazati da opisana kružnica trougla ATL dodiruje ω, i da KH prolazi kroz njihovu dodirnu tačku.

IGO 2021, AL, Problem 5 of 5

ENG

Given a triangle ABC with incenter I. The incircle of triangle ABC is tangent to BC at D. Let P and Q be points on the side BC such that $\angle PAB = \angle BCA$ and $\angle QAC = \angle ABC$, respectively. Let K and L be the incenter of triangles ABP and ACQ, respectively. Prove that AD is the Euler line of triangle IKL.

SRB

U trouglu ABC upisana kružnica ima centar I i dodiruje BC u tački D. Neka su P i Q tačke na stranici BC takve da važi $\angle PAB = \angle BCA$ i $\angle QAC = \angle ABC$. Neka su K i L centari kružnica upisanih u trouglove ABP i ACQ, redom. Dokazati da je AD Ojlerova prava trougla IKL.