

## Добавка-2

1. В очереди за пирожками стоят  $2n$  ребят. Рублевые монеты у 50% из них. У остальных — только по 50 коп. Цена пирожка 50 коп. Каждый берет 1 пирожок. Изначально у продавца нет денег. Какова вероятность, что все успешно купят пирожок?

2. Докажите, что если коэффициенты многочлена  $f$  взаимнопросты в совокупности и коэффициенты многочлена  $g$  взаимнопросты в совокупности, то коэффициенты многочлена  $fg$  взаимнопросты в совокупности

3. На окружности отмечены  $2n$  точек, найдите количество способов соединить их непересекающимися хордами, так, чтобы из каждой точки выходила ровно одна хорда.

4. Докажите, что при иррациональном отношении  $\alpha/\beta$  множество точек  $(\{t\alpha\}, \{t\beta\})$ ,  $t \in \mathbb{R}$  плотно в квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Напомним, что набор вещественных чисел  $x_1, \dots, x_s$  *линейно независимым* над  $\mathbb{Q}$ , если равенство  $\sum_{i=1}^s \alpha_i x_i = 0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{Q}$  влечет равенство нулю всех  $\alpha_i$ . (Например, независимость 1 и  $\alpha$  означает иррациональность  $\alpha$ ).

5. Пусть  $1, \alpha, \beta$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ . Докажите, что для любого  $n$  число  $\{n\alpha\}/\{n\beta\}$  — иррационально.

**6 (Двумерная теорема Кронекера).** Пусть  $1, \alpha, \beta$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ . Докажите, что множество точек  $(\{n\alpha\}, \{n\beta\})$  плотно в квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$

7. Докажите, что если многочлен неприводим как многочлен из  $\mathbb{Z}_p[x]$ , то он неприводим и как многочлен с целыми коэффициентами.

**8 (Лемма Гаусса).** Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами неприводим над  $\mathbb{Z}[x]$  тогда и только тогда, когда он неприводим над  $\mathbb{Q}[x]$

**9 (Критерий Эйзенштейна).** Пусть  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ , причем для некоторого простого  $p$  коэффициент  $a_n$  не делится на  $p$ , коэффициенты  $a_0, \dots, a_{n-1}$  делятся на  $p$ , но коэффициент  $a_0$  не делится на  $p^2$ . Тогда  $f$  неприводим над  $\mathbb{Z}$ .