# Числа Каталана

**Определение 1.** Обозначим через $C_n$ число неассоциативных произведений $n+1$ буквы. Число $C_0$ полагается равным 1. Число $C_n$ называется *$n$-ым числом Каталана.*

`a(b(cd))` `(ab)(cd)` `((ab)c)d` `a((bc)d)` `(a(bc))d`

**1.** Докажите, что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0 \ (n \geq 0)$$

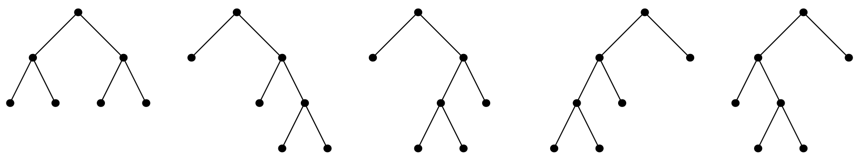
и начальным членом $C_0 = 1$.

**Упражнение 1.** Найдите первые 5 чисел Каталана.

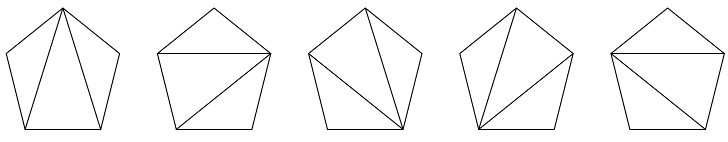
В следующих задачах приведен ряд множеств и требуется доказать, что количество элементов в них равно $C_n$. Для этого есть два основных способа — построить явную биекцию и проверить рекуррентное соотношение. В некоторых задачах полезно сделать и то и то.

Для однозначной трактовки условий задачи снабжены примером: списком исследуемых объектов для $n = 3$.

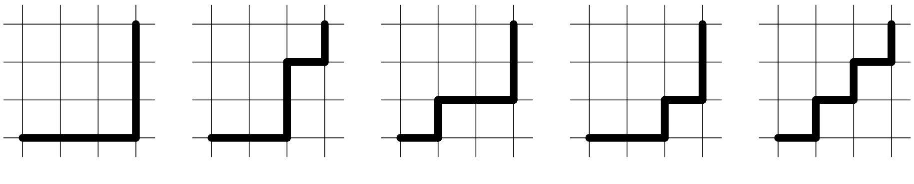
**2.** Докажите, что количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листом равно $C_n$.



**3.** Докажите, что количество *триангуляций* (разрезаний на $n$ треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n+2)$–угольника равно $C_n$.



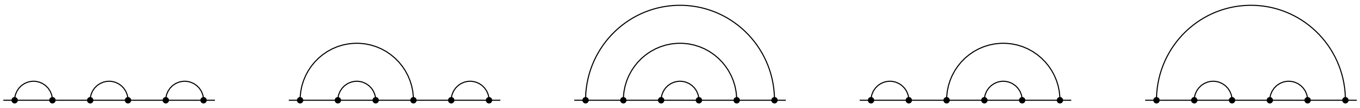
**4.** Докажите, что количество путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку $(n,n)$, не поднимающихся выше диагонали $y = x$, равно $C_n$.



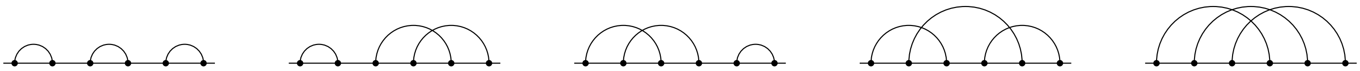
**5.** Докажите, что количество способов расставить в ряд $n$ открывающихся и $n$ закрывающихся скобок так, что среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся, равно $C_n$.

((()))  (())()  ()(())  (()())  ()()()

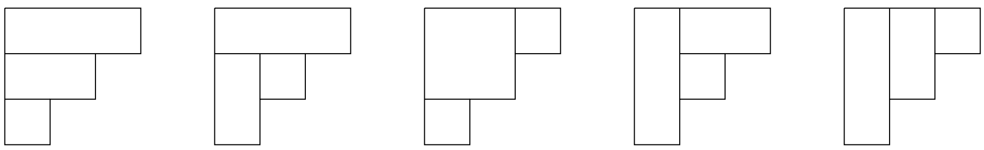
**6.** а) Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на горизонтальной прямой непересекающимися дугами (каждая дуга лежит в верхней полуплоскости) равно $C_n$.



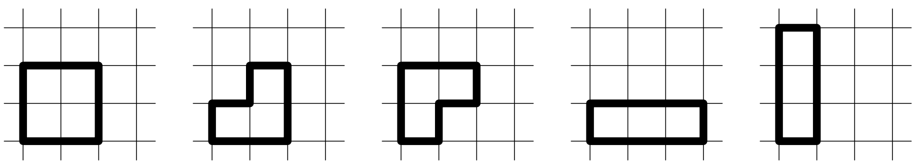
б) Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на горизонтальной прямой дугами, так что никакая дуга не лежит внутри другой (каждая дуга лежит в верхней полуплоскости), равно $C_n$.



**7.** Докажите, что количество способов разрезать "клетчатый равнобедренный прямоугольный треугольник" со стороной $n$ на $n$ прямоугольников равно $C_n$.



**8.** Докажите, что количество *«параллеломино»* (пара путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$ равно $C_n$.



**9.** а) Найдите количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(a,b)$, состоящих из $a$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток.
б) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей из $(0,0)$ в $(2n,-2)$, состоящих из $2n$ отрезков.
в) Найдите, чему равно $C_n$