

Планиметрические задачи МГУ

Синус и косинус спешат на помощь

1. Серединые перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают его высоту BH в точках M и N . Найдите BM , если $BN = a$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен R .
2. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите $\angle AED$, если $AB = BC = CD$, $AE = DE$ и $\angle CBD \neq \angle ACB$.
3. Две окружности радиусов 2 и 3 с хордами AC и BC соответственно касаются прямой AB . Найдите AB , если $\angle ACB = \pi/6$.
4. Через точку A проведены три прямые: две из них касаются данной окружности в точках K и L , а третья пересекает окружность в точках B и C , а также хорду KL в точке M . Найдите $AM : MC$, если $AB : BC = 2 : 3$.

Угадывание конфигурации

5. Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой угла A и пересекается с другой диагональю в точке E . Найдите $\angle ABD$, если $BC = CD$, $\angle BCD = 160^\circ$, $\angle CED = 130^\circ$.
6. На высотах AH и BK треугольника ABC взяты соответственно такие точки M и N , что $\angle ANC = \angle BMC = 90^\circ$, $\angle MCN = 30^\circ$, $MN = 4 + 2\sqrt{3}$. Найдите биссектрису CL треугольника MCN .
7. Диагонали описанного около окружности четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , лежащей на отрезке MN , соединяющем середины сторон AD и BC соответственно. Найдите радиус окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $ME : NE = 3 : 1$.
8. Две окружности пересекаются в точках A и B . Хорда CD одной окружности пересекается с хордой EF другой окружности в точке G . Найдите AG , если $BG = 2$, $AB = 3CG = 9EG$ и $FG = 3DG = 6CG$.

Дополнительные задачи

9. Диагонали BE и CE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, если $\angle A = 35^\circ$, $\angle D = 145^\circ$ а площадь треугольника BCE равна 11.
10. Окружность радиуса 6 касается катета AC и гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с периметром 54, а её центр лежит на катете BC . Найдите площадь треугольника ABC , если $AC > 10$.
11. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BAC и BDC равны, а площадь круга, описанного около треугольника BDC , равна $25\pi/4$. Найдите:
 - (a) радиус описанной около треугольника ABC окружности;
 - (b) площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 4$, $BC = 3$, $\angle BAD = 90^\circ$.
12. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = a$, $CD = c$ и основанием $BC = b$ угол $\angle B$ — прямой. Окружность, проходящая через точки C и D , касается стороны AB в точке E . Найдите площадь треугольника ECD .

Планиметрические задачи МГУ

Синус и косинус спешат на помощь

1. Середины перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают его высоту BH в точках M и N . Найдите BM , если $BN = a$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен R .
2. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите $\angle AED$, если $AB = BC = CD$, $AE = DE$ и $\angle CBD \neq \angle ACB$.
3. Две окружности радиусов 2 и 3 с хордами AC и BC соответственно касаются прямой AB . Найдите AB , если $\angle ACB = \pi/6$.
4. Через точку A проведены три прямые: две из них касаются данной окружности в точках K и L , а третья пересекает окружность в точках B и C , а также хорду KL в точке M . Найдите $AM : MC$, если $AB : BC = 2 : 3$.

Угадывание конфигурации

5. Диагональ AC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой угла A и пересекается с другой диагональю в точке E . Найдите $\angle ABD$, если $BC = CD$, $\angle BCD = 160^\circ$, $\angle CED = 130^\circ$.
6. На высотах AH и BK треугольника ABC взяты соответственно такие точки M и N , что $\angle ANC = \angle BMC = 90^\circ$, $\angle MCN = 30^\circ$, $MN = 4 + 2\sqrt{3}$. Найдите биссектрису CL треугольника MCN .
7. Диагонали описанного около окружности четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , лежащей на отрезке MN , соединяющем середины сторон AD и BC соответственно. Найдите радиус окружности, если $AB = 3$, $AC = \sqrt{13}$ и $ME : NE = 3 : 1$.
8. Две окружности пересекаются в точках A и B . Хорда CD одной окружности пересекается с хордой EF другой окружности в точке G . Найдите AG , если $BG = 2$, $AB = 3CG = 9EG$ и $FG = 3DG = 6CG$.

Дополнительные задачи

9. Диагонали BE и CE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, если $\angle A = 35^\circ$, $\angle D = 145^\circ$ а площадь треугольника BCE равна 11.
10. Окружность радиуса 6 касается катета AC и гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с периметром 54, а её центр лежит на катете BC . Найдите площадь треугольника ABC , если $AC > 10$.
11. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BAC и BDC равны, а площадь круга, описанного около треугольника BDC , равна $25\pi/4$. Найдите:
 - (а) радиус описанной около треугольника ABC окружности;
 - (б) площадь четырёхугольника $ABCD$, если $AC = 4$, $BC = 3$, $\angle BAD = 90^\circ$.
12. В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = a$, $CD = c$ и основанием $BC = b$ угол $\angle B$ — прямой. Окружность, проходящая через точки C и D , касается стороны AB в точке E . Найдите площадь треугольника ECD .