

# Задачи с параметрами МГУ

## Лучи и прямые

1. Найдите все  $a$ , при которых для любого  $b$  уравнение  $|x - 2| + b|2x + 1| = a$  имеет хотя бы один корень. Ответ:  $a = 5/2$

2. Найдите все  $a$ , при которых найдётся  $b$ , такое что система

$$2y - x \leq 1, \quad 2x + y \leq 2, \quad y + 1 + ax \geq 0, \quad x^2 + y^2 \geq b$$

не имеет решений.

Ответ:  $-1/2 < a < 2$

## Параболы

3. Найдите все  $a$ , при которых множество значений функции  $f(x) = \frac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$  содержится в интервале  $(-3; 2)$ . Ответ:  $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2$

4. Найдите все  $a$ , при которых неравенство  $x^2 - 3x + 3|x + a| + a \leq 0$  имеет наибольшее количество целочисленных решений. Ответ:  $a = -4; -5/2 \leq a \leq -9/4$

5. Найдите все  $a$ , при которых корни уравнений  $x^2 + \frac{3x}{a} + 2a = 0$  и  $x^2 + \frac{12x}{a} - a = 0$  перемежаются (т.е. каждое из уравнений имеет два корня и между ними лежит корень другого уравнения). Ответ:  $-3 \leq a < 0$

6. Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $x|x + 2a| + 1 - a = 0$  имеет единственный корень.

Ответ:  $a < (\sqrt{5} - 1)/2; a > 1$

## Гиперболы

7. Найдите все  $a$ , при которых графики функций  $y = \frac{3x + 1}{x}, y = \frac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$  разбивают координатную плоскость ровно на 5 частей. Ответ:  $0 \leq a \leq 1$

## Окружности

8. Найдите все пары  $(a, b)$ , при которых система

$$x^2 + y^2 + 5 = b^2 + 2x - 4y, \quad x^2 + (12 - 2a)x + y^2 = 2ay + 12a - 2a^2 - 27$$

имеет два различных решения  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , удовлетворяющих равенству  $\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$ .

Ответ:  $a = 4, b \in (-\sqrt{45} - 3; -\sqrt{45} + 3) \cup (\sqrt{45} - 3; \sqrt{45} + 3)$

9. Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$  имеет единственный корень.

Ответ:  $2 \leq a < 3; 3 < a \leq 4$

10. Докажите, что точки пересечения кривых, заданных уравнениями  $y = x^2 - 2x$  и  $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = 1$ , лежат на одной окружности, и найдите её радиус.

Ответ:  $\sqrt{161}/9$

## Разное

11. Найдите все пары  $a, b$ , при которых система  $\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0, \end{cases}$  имеет не менее 5 различных решений.

Ответ:  $a = \pm 1, b = -2; a \in \mathbb{R}, b = 2$

12. Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $5 \cos x + \sin x + \cos(x - \varphi) = a$  имеет корень  
(а) хотя бы при одном  $\varphi$ ; (б) при любом  $\varphi$ .

Ответ: (а)  $-1 - \sqrt{26} \leq a \leq 1 + \sqrt{26}$  (б)  $1 - \sqrt{26} \leq a \leq -1 + \sqrt{26}$

13. Пусть  $x_1, x_2$  — корни квадратного трёхчлена  $f(x) = (a - 1)x^2 - (2a + 1)x + (5a + 2)$ . Найдите  
(а) все  $a$ , при которых  $x_1, x_2 > 1$ ;  
(б) все  $b$ , при которых выражение  $(x_1 - b)(x_2 - b)$  принимает постоянное значение для всех  $a$ , для которых оно определено.

Ответ: (а)  $1 < a \leq (2 + \sqrt{13})/4$ ; (б)  $b = 7/3$

14. Найдите все натуральные  $a$ , при которых выражение  $\frac{1}{x + y + 3}$  имеет смысл для всех пар чисел  $x, y < 0$ , для которых имеет смысл выражение  $\lg(xy - a)$ .

Ответ:  $a \geq 3$

## Дополнительные задачи

15. Найдите все  $a$ , при которых уравнение  $2|x - a| + a - 4 + x = 0$  имеет хотя бы один корень, причем все его корни принадлежат отрезку  $[0, 4]$ .

Ответ:  $4/3 \leq a \leq 2$

16. Найдите все  $a$ , при которых система  $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$  имеет бесконечно много решений.

Ответ:  $a = -2$

17. Найдите все  $a$ , при каждом из которых для любого  $b$  система  $\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b - 6)y - 8z = 8 \end{cases}$  имеет хотя бы одно решение.

Ответ:  $-1/2 \leq a \leq 2/3$

18. Функция  $f(x) = ax^2 + bx + c$  удовлетворяет неравенствам  $f(-1) < 1, f(1) > -1, f(3) < -4$ . Определите знак коэффициента  $a$ .

Ответ:  $a < 0$

19. Найдите все  $a$ , при которых неравенство  $2ax + 2\sqrt{2x + 3} - 2x + 3a - 5 < 0$  выполняется для всех  $x \in [-1; 3]$ .

Ответ:  $a < 1/2$

20. Найдите все  $a$ , при которых система  $\begin{cases} 4x = a + 3 - y^2 + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2y, \end{cases}$  имеет ровно два решения.

Ответ:  $-8 < a < 0$

21. Найдите все  $a > 0$ , при которых система  $2|x| + |y| = 2, x^2 + y^2 = a^2$  имеет ровно 4 различных решения. При наименьшем таком  $a$  найдите площадь фигуры, заданной неравенством

$$\frac{2|x| + |y| - 2}{x^2 + y^2 - a^2} \leq 0.$$

Ответ:  $a = 2/\sqrt{5}; 1 < a < 2; S = 4 - 4\pi/5$

22. Найдите все  $a$ , при которых неравенство  $x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} \leq 7a - 1$  не имеет неотрицательных решений.

Ответ:  $-1 \leq a < -1/5$