Теоремы Мирского и Дилуорса

Определение. Отношение $\to$ на множестве $\mathcal{S}$ называется

- *рефлексивным*, если $\forall b \in \mathcal{S}$ справедливо $b \to b$;
- *антисимметричным*, если условия $a \to c$ и $c \to a$ одновременно могут выполняться только при $a = c$;
- *транзитивным*, если $\forall a, b, c \in \mathcal{S}$ из $a \to b$ и $b \to c$ следует $a \to c$;
- *отношением порядка*, если оно одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; в этом случае пара $(\mathcal{S}, \to)$ называется частично упорядоченным множеством (ЧУМ).

Элементы a и c называются *сравнимыми*, если $\left[\begin{array}{l} a \to c \\ c \to a \end{array}\right.$

Цепью называется набор попарно сравнимых элементов.
Антицепью называется набор попарно несравнимых элементов.
Максимальным называется элемент $a \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall c \in \mathcal{S}) a \not\to c$.
Минимальным называется элемент $c \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall a \in \mathcal{S}) a \not\to c$.

(a) В некотором ЧУМе есть (анти)цепь из d элементов. Докажите, что в нём есть как минимум $2^d - 1$ (анти)цепей.

(b) Докажите, что в одной цепи может быть не более одного минимального и не более одного максимального элемента, причём в максимальной (по включению) конечной цепи есть и такой, и такой.

(c) Докажите, что набор всех максимальных (минимальных) элементов образует антицепь.

Теорема Мирского: наименьшее количество антицепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе.

Теорема Дилуорса: наименьшее количество цепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе.

1. Дана последовательность из n различных чисел. Докажите, что

   (a) если $n > k^2$, то есть монотонная подпоследовательность из $k + 1$ чисел;

   (b) если $n \leq k^2$, то монотонной последовательности длины $k+1$ может не быть.

2. На прямой даны $ml + 1$ отрезков. Докажите, что можно либо выбрать $m + 1$ отрезков, имеющих общую точку, либо выбрать $l + 1$ отрезков, никакие два из которых не пересекаются.

3. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t + 1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

Теоремы Мирского и Дилуорса

Определение. Отношение $\to$ на множестве $\mathcal{S}$ называется

- *рефлексивным*, если $\forall b \in \mathcal{S}$ справедливо $b \to b$;
- *антисимметричным*, если условия $a \to c$ и $c \to a$ одновременно могут выполняться только при $a = c$;
- *транзитивным*, если $\forall a, b, c \in \mathcal{S}$ из $a \to b$ и $b \to c$ следует $a \to c$;
- *отношением порядка*, если оно одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно; в этом случае пара $(\mathcal{S}, \to)$ называется частично упорядоченным множеством (ЧУМ).

Элементы a и c называются *сравнимыми*, если $\left[\begin{array}{l} a \to c \\ c \to a \end{array}\right.$

Цепью называется набор попарно сравнимых элементов.
Антицепью называется набор попарно несравнимых элементов.
Максимальным называется элемент $a \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall c \in \mathcal{S}) a \not\to c$.
Минимальным называется элемент $c \in \mathcal{S}$, такой что $(\forall a \in \mathcal{S}) a \not\to c$.

(a) В некотором ЧУМе есть (анти)цепь из d элементов. Докажите, что в нём есть как минимум $2^d - 1$ (анти)цепей.

(b) Докажите, что в одной цепи может быть не более одного минимального и не более одного максимального элемента, причём в максимальной (по включению) конечной цепи есть и такой, и такой.

(c) Докажите, что набор всех максимальных (минимальных) элементов образует антицепь.

Теорема Мирского: наименьшее количество антицепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшей длине цепи в этом ЧУМе.

Теорема Дилуорса: наименьшее количество цепей, покрывающих конечное ЧУМ, равно наибольшему размеру антицепи в этом ЧУМе.

1. Дана последовательность из n различных чисел. Докажите, что

   (a) если $n > k^2$, то есть монотонная подпоследовательность из $k + 1$ чисел;

   (b) если $n \leq k^2$, то монотонной последовательности длины $k+1$ может не быть.

2. На прямой даны $ml + 1$ отрезков. Докажите, что можно либо выбрать $m + 1$ отрезков, имеющих общую точку, либо выбрать $l + 1$ отрезков, никакие два из которых не пересекаются.

3. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t + 1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.