Множества и графы

1. В некоторой стране одна Столица и N провинциальных городов. Дороги с односторонним движением ведут: во–первых, из столицы в каждый провинциальный город; во–вторых, из i–того провинциального города в $(i+1)$–й и из N–ого — в первый. Хочется перекрыть половину всех дорог так, чтобы по оставшимся всё равно можно было бы проехать из столицы в любой провинциальный город. Сколькими способами это можно сделать?

2. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

3. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причём при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

4. Города $P_1, P_2, ..., P_{1983}$ соединены попарно двусторонними авиалиниями, принадлежащими компаниям $A_1, A_2, ..., A_{10}$. Докажите, что существует хотя бы одна компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе и с нечетным числом используемых авиалиний.

5. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, ..., x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, ..., y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2011} = y_1 + y_2 + ... + y_{2011}.$$

   За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

6. На прямой даны $ml + 1$ отрезков. Докажите, что можно либо выбрать $m + 1$ отрезков, имеющих общую точку, либо выбрать $l + 1$ отрезков, никакие два из которых не пересекаются.

7. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t + 1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

Множества и графы

1. В некоторой стране одна Столица и N провинциальных городов. Дороги с односторонним движением ведут: во–первых, из столицы в каждый провинциальный город; во–вторых, из i–того провинциального города в $(i+1)$–й и из N–ого — в первый. Хочется перекрыть половину всех дорог так, чтобы по оставшимся всё равно можно было бы проехать из столицы в любой провинциальный город. Сколькими способами это можно сделать?

2. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является чётным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

3. На вечеринке компанию из 20 человек требуется усадить за 4 стола. Рассадка называется *удачной*, если любые два человека, оказавшиеся за одним столом, являются друзьями. Выяснилось, что удачные рассадки существуют, причём при любой удачной рассадке за каждым столом сидят ровно по 5 человек. Каково наибольшее возможное количество пар друзей в этой компании?

4. Города $P_1, P_2, ..., P_{1983}$ соединены попарно двусторонними авиалиниями, принадлежащими компаниям $A_1, A_2, ..., A_{10}$. Докажите, что существует хотя бы одна компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе и с нечетным числом используемых авиалиний.

5. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, ..., x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, ..., y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2011} = y_1 + y_2 + ... + y_{2011}.$$

   За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

6. На прямой даны $ml + 1$ отрезков. Докажите, что можно либо выбрать $m + 1$ отрезков, имеющих общую точку, либо выбрать $l + 1$ отрезков, никакие два из которых не пересекаются.

7. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых $t + 1$ из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в t цветов так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.