

# Логарифмы: преобразования

1. При каких рациональных  $r$  число  $\log_2 r$  – рациональное?
2. Докажите, что  $+\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4,4$ .
3. Сколько цифр в десятичной записи числа  $3^{100}$ ?
4. Положительные  $a, b, c$  таковы, что  $\frac{a(b+c-a)}{\lg a} = \frac{b(c+a-b)}{\lg b} = \frac{c(a+b-c)}{\lg c}$ .  
Докажите, что  $a^b b^a = a^c c^a = c^b b^c$ .
5. Сравните
  - (a)  $2^{\log_3 5}$  и  $5^{\log_3 2}$ ;
  - (b)  $\log_5 32$  и  $\log_2 5$ ;
  - (c)  $\log_7 8$  и  $\log_8 9$ ;
  - (d)  $2^{\sqrt{\log_2 2004}}$  и  $2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$ .
6. Докажите, что  $\log_{n-1} 10 + \log_{n+1} 10 > 2 \log_n 10$  при всех натуральных  $n \geq 3$ .
7. Докажите, что  $(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} > 2$ .
8. Докажите для всех  $n \in \mathbb{N}$  неравенство  $\log(n+1) > \frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{n}$ .
9. Значение  $a$  подобрано так, что число корней первого из уравнений

$$4^x - 4^{-x} = 2 \cos ax, \quad 4^x + 4^{-x} = 2 \cos ax + 4$$

равно 2011. Сколько корней при том же  $a$  имеет второе уравнение?

# Логарифмы: уравнения, неравенства, системы

1. Решите...

(a) ... уравнение  $\left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^x = 8$ ;

(b) ... систему  $3^x - 2^{2y} = 65, 3^{x/2} - 2^y = 5$ ;

(c) ... уравнение  $|x|^{x^2-2x} = 1$ ;

(d) ... неравенство  $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$ ;

(e) ... уравнение  $3^x + 4^x = 5^x$ ;

(f) ... уравнение  $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$ ;

(g) ... уравнение  $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6 \cdot \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$ ;

(h) ... уравнение  $2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 3 \cdot 16^{x^3}$ ;

(i) ... систему  $x^{x+y} = y^{x-y}, x^2y = 1, x, y > 0$ .

2. При каких  $k \in \mathbb{R}$  уравнение  $\frac{\log(kx)}{\log(x+1)} = 2$  имеет ровно один корень?

3. Решите уравнение  $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2x} a = 0$  ( $0 < a \neq 1$ ).

4. Решите...

(a) ... уравнение  $3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}$ ;

(b) ... уравнение  $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$ ;

(c) ... уравнение  $9 \log_{\sin 2x} (4 \cos^2 x) + 8 \log_{2 \cos x} \sin x = 16$ ;

(d) ... неравенство  $\frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(2+x)}{x}$ .

5. Решите  $\log_{|\cos x|} |x| < 0$ .

6. При каких  $\alpha$  разрешимо  $\alpha x^2 = \ln x$ ?

7. Сколько корней имеет уравнение  $e^x = ax$  в зависимости от  $a$ ?

8. Решите систему  $x^y = z, y^z = x, z^x = y$ .