Теория чисел

1. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы – ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?
2. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности – целые числа.
3. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.
4. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a + c$, $b + c$ – составное.

Физтех-лицей. Январские сборы
30 января 2016

Теория чисел

1. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы – ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?
2. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности – целые числа.
3. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.
4. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a + c$, $b + c$ – составное.

Физтех-лицей. Январские сборы
30 января 2016

Теория чисел

1. В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две группы так, что любая команда первой группы одержала n побед, а любая команда второй группы – ровно m побед. Могло ли оказаться, что $m \neq n$?
2. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности – целые числа.
3. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.
4. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a + c$, $b + c$ – составное.