

Доказательство существования через принцип крайнего

Решения, организующие процесс, а не применяющие принцип крайнего, запрещены из глубоких педагогических соображений!

1. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Доказать, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в каждом столбце и каждой строке, неотрицательны.
2. В графе нет циклов и вершин степени ноль. Докажите, что в нем есть вершина степени один.
3. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, в котором занимается не менее двух третей всего класса.
4. Несколько команд сыграли однокруговой турнир без ничьих. Докажите, что найдется такая команда А, что любая другая команда В либо проиграла А, либо проиграла тому, кто проиграл А.
5. На плоскости отмечено $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары так, что отрезки, соединяющие точки из разных пар, не будут пересекаться.
6. В парламенте Табулистана некоторые депутаты враждуют. Известно, что каждый депутат враждует ровно с тремя другими. Докажите, что всех депутатов можно разбить на четыре фракции так, что в каждой фракции никто не враждует.
7. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтобы все 100 читателей его услышали.