Комбинаторика. Часть вторая

1. 2016 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots x_{2016}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2016}$ кг цемента соответственно, причём
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2016} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{2016}.$$
За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

2. Фигура "мамонт" бьет как слон (по диагоналям), но только в трех направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?

3. На окружности отмечено $2N$ точек (N – натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

4. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

Физтех-лицей. Январские сборы
29 января 2015

Комбинаторика. Часть вторая

1. 2016 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots x_{2016}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2016}$ кг цемента соответственно, причём
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2016} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{2016}.$$
За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

2. Фигура "мамонт" бьет как слон (по диагоналям), но только в трех направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?

3. На окружности отмечено $2N$ точек (N – натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

4. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?