

Комбинаторика

1. Тридцать девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих платьях – водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стоячи между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?
2. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трех клеток так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку).
3. В языке племени АУ две буквы – “а” и “у”. Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.
4. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2 . Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a . Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?
5. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2013$?
6. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём расстоянием между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n , увеличилось?

Физтех-лицей. Январские сборы
29 января 2015

Комбинаторика

1. Тридцать девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих платьях – водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стоячи между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?
2. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трех клеток так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку).
3. В языке племени АУ две буквы – “а” и “у”. Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.
4. Все клетки квадратной таблицы $n \times n$ пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до n^2 . Петя делает ходы по следующим правилам. Первым ходом он ставит ладью в любую клетку. Каждым последующим ходом Петя может либо поставить новую ладью на какую-то клетку, либо переставить ладью из клетки с номером a ходом по горизонтали или по вертикали в клетку с номером большим, чем a . Каждый раз, когда ладья попадает в клетку, эта клетка немедленно закрашивается; ставить ладью на закрашенную клетку запрещено. Какое наименьшее количество ладей потребуется Пете, чтобы независимо от исходной нумерации он смог за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?
5. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, \dots так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k , равнялась $k + 2013$?
6. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём расстоянием между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n , увеличилось?