Алгебраические задачи

Прогрессии и последовательности

1. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что при всех неотрицательных m и n ($m \geq n$) выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$. Найдите a_{1995}, если $a_1 = 1$.

2. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $\frac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при любом нечетном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

3. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия$\{a_n\}$, $n \in N$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \ldots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \cdots + a_{n+9}$ при любом натуральном n?

Тригонометрия

4. Найдите все углы α, для которых набор чисел $\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha$ совпадает с набором $\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha$.

5. Для углов α, β, γ справедливо равенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$.

6. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

Свойства и графики функций

7. Функция $f(x)$ определена и удовлетворяет соотношению $(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$ при всех $x \neq 1$. Найдите все такие функции.

8. Дана функция $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$?

9. На доске написано: $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$. Два школьника по очереди вписывают вместо многоточий действительные числа. Цель первого – получить уравнение, имеющее ровно один действительный корень. Сможет ли второй ему помешать?

Многочлены

10. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ имеет два различных действительных корня. Докажите, что уравнение $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

11. Найдите все пары квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ такие, что a и b — корни второго трехчлена, c и d — корни первого.

12. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, что уравнение

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{10}) = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных действительных корней.

13. Даны целые числа a, b и c, $c = b$. Известно, что квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$ имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.

14. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ — 7 различных корней?

15. Произведение квадратных трехчленов $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$,. . . , $x^2+a_nx+b_n$ равно многочлену $P(x) = x^{2n}+c_1x^{2n-1}+c_2x^{2n-2}+\ldots+c_{2n-1}x+c_{2n}$, где коэффициенты c_1, c_2, . . . , c_{2n} положительны. Докажите, что для некоторого k $(1 \le k \le n)$ коэффициенты a_k и b_k положительны.

Разное

16. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$$

Докажите, то число $1 - ab$ квадратом рационального числа.

17. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 > 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 > 2$.

18. Может ли в наборе из шести чисел $\left(a;\ b;\ c;\ \frac{a^2}{b};\ \frac{b^2}{c};\ \frac{c^2}{b}\right)$, где a, b, c — положительные числа, оказаться ровно три различных числа?