Сборы ФЛ. 31 января 2016
10 класс. Геометрия

Углы в окружностях

1. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

3. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

Замечательные точки в треугольнике

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L со- ответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O — точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точ- ки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

7. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть $\mathrm{B}_1\mathrm{H}$ — высота треугольника $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Разное

8. Три попарно непересекающихся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к ω_yи ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

Дополнительные задачи

10. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ выбрана точка D. На плоскости выбрали точку E $(E \notin AB)$ такую, что $\angle ABC = \angle CBE$, $BD = BE$. Докажите, что $\angle DAC = \angle CED$.

11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

12. Каждая из двух равных окружностей ω_1 и ω_2 проходит через центр другой. Треугольник ABC вписан в ω_1, а прямые AC, BC касаются ω_2. Докажите, что $\cos\angle A + \cos\angle B = 1$.

13. Два правильных многоугольника P и Q разрезали на две части двумя прямыми, после чего соединили без самопересечений и наложений одну из частей P и одну из частей Q. В результате получился правильный многоугольник, отличный от P и Q. Сколько вершин может оказаться в этом многоугольнике?

Сборы ФЛ. 31 января 2016
10 класс. Геометрия

Углы в окружностях

1. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке O. Точки A и B на окружности ω_1 и точки C и D на окружности ω_2 таковы, что AC и BD — общие внешние касательные к окружностям. Прямая AO пересекает отрезок CD в точке M, а прямая CO пересекает вторично окружность ω_1 в точке N. Докажите, что точки B, M и N лежат на одной прямой.

3. Прямые, касающиеся окружности ω в точках B и D, пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P, высекает на окружности хорду AC. Через произвольную точку отрезка AC проведена прямая, параллельная BD. Докажите, что она делит длины ломаных ABC и ADC в одинаковых отношениях.

Замечательные точки в треугольнике

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L со- ответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AA' и отмечены точки H и O — точка пересечения высот и центр описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная центру описанной окружности треугольника HOA' относительно прямой HO, лежит на средней линии треугольника ABC.

6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точ- ки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

7. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

Разное

8. Три попарно непересекающихся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к ω_yи ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$.

Дополнительные задачи

10. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ выбрана точка D. На плоскости выбрали точку E $(E \notin AB)$ такую, что $\angle ABC = \angle CBE$, $BD = BE$. Докажите, что $\angle DAC = \angle CED$.

11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

12. Каждая из двух равных окружностей ω_1 и ω_2 проходит через центр другой. Треугольник ABC вписан в ω_1, а прямые AC, BC касаются ω_2. Докажите, что $\cos\angle A + \cos\angle B = 1$.

13. Два правильных многоугольника P и Q разрезали на две части двумя прямыми, после чего соединили без самопересечений и наложений одну из частей P и одну из частей Q. В результате получился правильный многоугольник, отличный от P и Q. Сколько вершин может оказаться в этом многоугольнике?