

Геометрия

Задача 1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике на гипотенузе AB от вершины A отложим отрезок AD , равный катету AC , а от вершины B - отрезок BE , равный катету BC . Докажите, что длина отрезка DE равна диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC .

Задача 3. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности ω , вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой AC . Они касаются ω в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B , K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

Задача 4. Дан выпуклый четырёхугольник. Если провести в нем любую диагональ, он разделится на два равнобедренных треугольника. А если провести в нем обе диагонали сразу, он разделится на четыре равнобедренных треугольника. Обязательно ли этот четырёхугольник – квадрат?

Задача 5. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны. Докажите, что если биссектрисы углов DAC , DBC , ACB и ADB образовали ромб, то $AB = CD$.

Задача 6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины M и N отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?

Задача 7. Докажите, что сторона BC треугольника ABC видна из центра O вписанной окружности под углом $90^\circ + \angle A/2$, а из центра O_1 внеписанной окружности, касающейся стороны BC , - под углом $90^\circ - \angle A/2$.

Задача 8. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Пусть B_1H – высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB .

Задача 9. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D . На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC . Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

Задача 10. Окружности w_1 и w_2 касаются внешним образом в точке P . Через центр w_1 проведена прямая l_1 , касающаяся w_2 . Аналогично, прямая l_2 касается w_1 и проходит через центр w_2 . Оказалось, что прямые l_1 и l_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных l_1 и l_2 .

Задача 11. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D . Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0 , где A_0 и C_0 – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.