Теория чисел

Остатки

Рассмотрение остатков может быть полезным в самых разных ситуациях. Остатки могут быть препятствием для разрешимости уравнений в целых числах. Например, не существует натуральных x, y, для которых $x^2 + 1 = 3^y$, поскольку x^2 не может давать остаток 2 при делении на 3.

Остаток может являться инвариантом в задачах, связанных с процессами.

1. Докажите, что уравнение $x^3+y^3 = 4(x^2y+xy^2+1)$ не имеет решений в целых числах.

2. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

3. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (т. е. 1, 2, 4, 8, . . .). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100 000. Докажите, что статистик ошибся.

Делимость, простые числа, разложение на простые множители

Во многих задачах о делимости, НОД, НОК, используется существование и единственность разложения на простые сомножители (*основная теорема арифметики*). Полезно рассмотрение простого делителя p и показателя степени, в которой p входит в разложение чисел на простые множители.

4. Найдите все простые p такие, что число $p^2 + 11$ имеет ровно 6 различных делителей (включая единицу и само число).

5. Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

6. Корни двух приведенных квадратных трехчленов — отрицательные целые числа, причем один из этих корней — общий. Могут ли значения этих трехчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

7. На отрезке $[0, 2002]$ отмечены его концы и точка с координатой d, где d — взаимно простое с 1001 число. Разрешается отметить середину любого отрезка с концами в отмеченных точках, если ее координата целая. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, отметить все целые точки на отрезке?

8. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается 1 раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

9. По кругу выписаны в некотором порядке все натуральные числа от 1 до N, $N \geqslant 2$. При этом для любой пары соседних чисел имеется хотя бы одна цифра, встречающаяся в десятичной записи каждого из них. Найдите наименьшее возможное значение N.

Признаки делимости

Признак делимости на 11: натуральное число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность сумм цифр, стоящих на четных и на нечетных местах, делится на 11. Обобщение признаков делимости на 3 и на 9: натуральное число и его сумма цифр дают равные остатки при делении на 3 и на 9. Используются также более простые признаки делимости на 4, 5, 8 и т. д.

10. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

11. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, делящееся на 11?

Оценочные задачи

Несложными примерами могут служить следующие оценки: расстояние между двумя различными числами, делящимися на n, не меньше n; если a и b — точные квадраты, причем $a > b > n$, то $a - b > 2\sqrt{n}$.

12. Можно ли в таблице 11×11 расставить натуральные числа от 1 до 121 так, чтобы числа, отличающиеся друг от друга на единицу, располагались в клетках с общей стороной, а все точные квадраты попали в один столбец?

13. Саша написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.

14. Среди 18 деталей, выставленных в ряд, какие-то три подряд стоящие весят по 99 г, а все остальные — по 100 г. Двумя взвешиваниями на весах со стрелкой определите все 99-граммовые детали.

15. Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что $x + y = a^n$, $x^2 + y^2 = a^m$ для некоторых натуральных a, n, m.