Методы. Задачи смешанного типа

Принцип Дирихле

Если в n клетках сидит $n+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее двух кроликов. Более общая форма: если в nk клетках сидит не менее $nk+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит не менее $k+1$ кроликов.

1. На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого).

2. На плоскости дано множество из $n \geqslant 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях.

3. Можно ли клетки доски 5×5 покрасить в 4 цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее чем в 3 цвета?

4. Каждая деталька нструктора «Юный паяльщик» — это скобка в виде буквы «П», состоящая из трех единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединенных единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)

Принцип крайнего

При решении задач полезно рассматривать объекты и случаи, являющиеся в некотором смысле «крайними». Приведем примеры начала рассуждений по принципу крайнего: «среди данных n точек выберем пару наиболее удаленных», «предположим, что условие неверно, и рассмотрим многочлен минимальной степени, не удовлетворяющий условию», «среди всех подмножеств данного конечного множества чисел выберем подмножество с наибольшей суммой» и т. д.

5. На прямой имеется $2n+1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

6. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, ..., 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

7. В ячейки куба $11 \times 11 \times 11$ поставлены по одному числа 1, 2, ..., 1331. Из одного углового кубика в противоположный угловой отправляются два червяка. Каждый из них может проползатьв соседний по грани кубик, при этом первый может проползать, если число в соседнем кубике отличается на 8, второй — если отличается на 9. Существует ли такая расстановка чисел, что оба червяка смогут добраться до противоположного углового кубика?

Математическая индукция

8. На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.

9. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не бо- лее, чем одним способом.

10. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке 1×1 которого нарисована одна из четырех стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки — выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90° по часовой стрелке. Если фишка должна сделать ход, выводящий ее за пределы квадрата 8×8, она остается на месте, а стрелка также поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

Решетки и раскраски

11. Из 54 одинаковых единичных картонных квадратов сделали незамкнутую цепочку, соединив их шарнирно вершинами. Любой квадрат (кроме крайних) соединен с соседями двумя противоположными вершинами. Можно ли этой цепочкой квадратов полностью закрыть поверхность куба $3 \times 3 \times 3$?

12. Клетки квадрата 9×9 окрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется или клетка, у которой ровно два красных соседа по углу, или клетка, у которой ровно два синих соседа по углу (или и то, и другое).

13. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

14. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

15. Можно ли так расставить фишки в клетках доски 8×8, чтобы в любых двух столбцах количество фишек было одинаковым, а в любых двух строках — различным?