

Комбинаторика

Подсчет или оценка количества вариантов

Простейшим способом отыскать количество вариантов является *комбинаторный принцип счета*: если объект A можно выбрать a способами, и для каждого из этих a способов имеется b способов выбрать объект B , то количество способов выбрать пару (упорядоченную) объектов (A, B) равно ab .

1. Назовем билет с номером от 000000 до 999999 *отличным*, если разность некоторых двух соседних цифр его номера равна 5. Найдите число *отличных* билетов.
2. В Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются два дня недели, в которые она не может выезжать на улицы города. Семье требуется каждый день иметь в распоряжении не менее 10 машин. Каким наименьшим количеством машин может обойтись семья, если ее члены могут сами выбирать запрещенные дни для своих автомобилей?

Оценка и пример

Во многих задачах о конечных множествах, наборах чисел, таблицах, ставится вопрос о нахождении экстремума некоторой величины или об установлении некоторой оценки комбинаторными методами.

3. N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. *Изображенным* назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди изображенных?
4. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.
5. Набор из 2003 положительных чисел таков, что для любых двух входящих в него чисел a и b ($a > b$) хотя бы одно из чисел $a + b$ или $a - b$ тоже входит в набор. Докажите, что если данные числа упорядочить по возрастанию, то разности между соседними числами окажутся одинаковыми.
6. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль?
7. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения Т-образного тетрамино на доске (его можно поворачивать, но клетки не должны выходить за пределы доски). Назовем такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырех клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

Соответствия

Решающей идеей в задаче может быть построение некоторого соответствия между объектами. Важный частный случай соответствия — разбиение на пары.

8. Дан набор, состоящий из 1997 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.
9. Назовем десятизначное число интересным, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?
10. В клетчатом квадрате 101×101 каждая клетка внутреннего квадрата 99×99 покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате 3×3 в цвет центральной клетки покрашена еще ровно одна клетка?
11. Все стороны и диагонали правильного 12-угольника раскрашиваются в 12 цветов (каждый отрезок — одним цветом). Существует ли такая раскраска, что для любых трех цветов найдутся три вершины, попарно соединенные между собой отрезками этих цветов?
12. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придется выписать?

Процессы и операции

Если в задаче речь идет о последовательном выполнении некоторых операций, то ключевым шагом к решению может оказаться нахождение величины или характеристики, которая сохраняется при выполнении операций (такая величина называется инвариантом), либо нахождение величины, которая изменяется монотонно (например, не увеличивается) при выполнении операций (такая величина называется полуинвариантом).

Также важным соображением может оказаться периодичность процесса, обратимость операции, так называемая дискретная непрерывность некоторой величины (так говорят, если за одну операцию величина изменяется «не на много»).

13. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.
14. Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?
15. Назовем «сочетанием цифр» несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний.