Неравенство Коши

Неравенство Коши или неравенство о средних для n неотрицательных чисел, где n — любое натуральное число:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ \dots \ + \ a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \dots \ \cdot a_n}$$

где $a_i \geqslant 0$. Выражение слева — **среднее арифметическое** n чисел, а справа — **среднее геометрическое**. (Докажите это неравенство для n=3).

Задача 1. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ при любых x, y, z.

Задача 2. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Задача 3. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc + ac + abc$, если $a + b + c = 12$ (a, b и c – неотрицательные числа).

Задача 4. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что $(2 + x)(2 + y)(2 + z) \geq 27$.

Задача 5. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что $(2 + a)(2 + b) \geq cd$.

Системы уравнений

Задача 6. Решить систему пятнадцати уравнений с пятнадцатью неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1 - x_1x_2 & = & 0, \\ 1 - x_2x_3 & = & 0, \\ 1 - x_3x_4 & = & 0, \\ \dots & & \dots \\ 1 - x_{14}x_{15} & = & 0, \\ 1 - x_{15}x_1 & = & 0. \end{array}\right.$$

Задача 7. Решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 9, \\ x_3 + x_4 + x_5 & = & 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 & = & -3, \\ x_5 + x_6 + x_7 & = & -9, \\ x_6 + x_7 + x_8 & = & -6, \\ x_7 + x_8 + x_1 & = & -2, \\ x_8 + x_1 + x_2 & = & 2. \end{array}\right.$$

Задача 8. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 & = & 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 & = & 3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 & = & 4, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 & = & 5. \end{cases}$$

Задача 9. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \cdots + 2x_{100} & = & 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots + 4x_{100} & = & 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \cdots + 6x_{100} & = & 3, \\ \cdots & & \cdots \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \cdots + 199x_{100} & = & 100. \end{cases}$$

Задача 10. Решить систему:

$10x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0,$
$11x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 0,$
$15x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 = 0,$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 12x_4 - 3x_5 + x_6 + x_7 = 0,$
$6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 17x_5 + x_6 = 0,$
$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 16x_6 + 2x_7 = 0,$
$4x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + 19x_7 = 0.$

Задача 11. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Исследование квадратных трёхчленов

Задача 12. Известно, что модули всех корней уравнений $x^2 + Ax + B = 0$, $x^2 + Cx + D = 0$ меньше единицы. Доказать, что модули корней уравнения $x^2 + \frac{A+C}{2}x + \frac{B+D}{2} = 0$ также меньше единицы. A, B, C, D – действительные числа.

Задача 13. Даны квадратные трёхчлены $x^2 + 2a_1x + b_1$, $x^2 + 2a_2x + b_2$, $x^2 + 2a_3x + b_3$. Известно, что $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3 > 1$.
Докажите, что хотя бы один из этих трёхчленов имеет два корня.

Тождественные преобразования

Задача 14. Докажите тождество

$$(ax + by + cz)^2 + (bx + cy + az)^2 + (cx + ay + bz)^2 = (cx + by + az)^2 + (bx + ay + cz)^2 + (ax + cy + bz)^2.$$

Задача 15. Докажите тождество

$$(ax + by + cz + du)^2 + (bx + cy + dz + au)^2 + (cx + dy + az + bu)^2 +$$
$$+ (dx + ay + bz + cu)^2 =$$
$$= (dx + cy + bz + au)^2 + (cx + by + az + du)^2 + (bx + ay + dz + cu)^2 +$$
$$+ (ax + dy + cz + bu)^2.$$

Задача 16. Числа a, b и c таковы, что $(a + b)(b + c)(c + a) = abc$, $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3$. Докажите, что $abc = 0$.

Задача 17. Числа a и b таковы, что $a^3 – b^3 = 2$, $a^5 – b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2$.

Свойства коэффициентов многочлена

Задача 18. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $(x^2 – 3x + 1)^{100}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Задача 19. Определить коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1 + x^5 + x^7)^{20}.$$

Задача 20. Доказать, что в произведении $(1 – x + x^2 – x^3 + ... – x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{99} + x^{100})$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов не остаётся членов, содержащих x в нечётной степени.