Уравнения Пелля (*группа «11-Ь»*)

Структура решений

1. Решите уравнение $x^2 - ay^2 = 1$ в том случае, если a — полный квадрат.
2. Найдите все целочисленные решения уравнения $a^2 - 7b^2 = 1$.
3. Докажите, что последовательнось пар (x_n, y_n), заданная начальными условиями $x_0 = 1, y_0 = 0$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ и рекуррентными соотношениями $x_k = 4x_{k-1} - x_{k-2}$, $y_k = 4y_{k-1} - y_{k-2}$, является множеством натуральных решений уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$.
4. Найдите все целочисленные решения уравнения $n^2 - 5m^2 = -1$.
5. Докажите, что уравнение $2x^2 + x = 3y^2 + y$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
6. Решите в рациональных числах $(p + q\sqrt{3})^8 + (r + s\sqrt{3})^8 = 5 + 3\sqrt{3}$.

Существование решения

7. Разрешимо ли уравнение $x^2 - 7y^2 = -1$ в целых числах?
8. Существует ли натуральное d, при котором уравнение $x^2 - ay^2 = d$ для любого целого a имеет ненулевое (т.е. в котором $x \neq 0$ и $y \neq 0$) целочисленное решение?
9. Докажите, что в гиперболы $x^2 - ay^2 = \pm d$ можно вписать параллелограмм (по одной вершине на каждой ветви), и найдите площадь такого параллелограмма.
10. При каких d разрешимо уравнение $x^2 - 4y^2 = d$?
11. Докажите **теорему Минковского**: любое выпуклое центрально симметричное относительно начала координат множество площади больше 4 содержит хотя бы один узел целочисленной решетки, кроме начала координат.
12. Докажите, что для любого вещественного числа γ и натурального N существует такое целое число a и натуральное число b, что $b \leq N$ и

$$|b\gamma - a| \leq \frac{1}{N+1}.$$

Уравнения Пелля (*группа «11-Ь»*)

Структура решений

1. Решите уравнение $x^2 - ay^2 = 1$ в том случае, если a — полный квадрат.
2. Найдите все целочисленные решения уравнения $a^2 - 7b^2 = 1$.
3. Докажите, что последовательнось пар (x_n, y_n), заданная начальными условиями $x_0 = 1, y_0 = 0$, $x_1 = 2$, $y_1 = 1$ и рекуррентными соотношениями $x_k = 4x_{k-1} - x_{k-2}$, $y_k = 4y_{k-1} - y_{k-2}$, является множеством натуральных решений уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$.
4. Найдите все целочисленные решения уравнения $n^2 - 5m^2 = -1$.
5. Докажите, что уравнение $2x^2+x = 3y^2+y$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
6. Решите в рациональных числах $(p + q\sqrt{3})^8 + (r + s\sqrt{3})^8 = 5 + 3\sqrt{3}$.

Существование решения

7. Разрешимо ли уравнение $x^2 - 7y^2 = -1$ в целых числах?
8. Существует ли натуральное d, при котором уравнение $x^2 - ay^2 = d$ для любого целого a имеет ненулевое (т.е. в котором $x \neq 0$ и $y \neq 0$) целочисленное решение?
9. Докажите, что в гиперболы $x^2 - ay^2 = \pm d$ можно вписать параллелограмм (по одной вершине на каждой ветви), и найдите площадь такого параллелограмма.
10. При каких d разрешимо уравнение $x^2 - 4y^2 = d$?
11. Докажите **теорему Минковского**: любое выпуклое центрально симметричное относительно начала координат множество площади больше 4 содержит хотя бы один узел целочисленной решетки, кроме начала координат.
12. Докажите, что для любого вещественного числа γ и натурального N существует такое целое число a и натуральное число b, что $b \leq N$ и

$$|b\gamma - a| \leq \frac{1}{N+1}.$$