Алгебраические числа (*группа «Профи»*)

1. Даны целые числа a, b, c, d, причем $c \neq 0$, а d — не полный квадрат. Найдите многочлен минимальной степени с целыми коэффициентами, корнем которого будет число $(a + b\sqrt{d})/c$. Какими будут остальные корни этого многочлена?
2. Даны числа $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt{5}-\sqrt{7}$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$, $\sqrt{5} : \sqrt{7}$. Для каждого из них найдите какой-нибудь многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого оно является.
3. Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого будет число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.
4. Является ли счетным множество всех корней всех многочленов, коэффициенты которых — алгебраические числа?

Минимальным многочленом алгебраического числа называется многочлен минимальной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является данное алгебраическое число.

5. Дано алгебраическое число α. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — его минимальные многочлены. Докажите, что найдутся рациональные λ_1 и λ_2, такие что $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$. Будем обозначать минимальный многочлен для α буквой P, понимая, что он определен с точностью до пропорциональности.
6. Дано алгебраическое число α, P — его минимальный многочлен. Пусть $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\deg P = n)$ — все (в том числе комплексные) корни многочлена P, т.е. сопряженные с α. Докажите, что P также является минимальным многочленом для каждого из $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Алгебраические числа (*группа «Профи»*)

1. Даны целые числа a, b, c, d, причем $c \neq 0$, а d — не полный квадрат. Найдите многочлен минимальной степени с целыми коэффициентами, корнем которого будет число $(a + b\sqrt{d})/c$. Какими будут остальные корни этого многочлена?

2. Даны числа $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt{5}-\sqrt{7}$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$, $\sqrt{5} : \sqrt{7}$. Для каждого из них найдите какой-нибудь многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого оно является.

3. Найдите многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого будет число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

4. Является ли счетным множество всех корней всех многочленов, коэффициенты которых — алгебраические числа?

Минимальным многочленом алгебраического числа называется многочлен минимальной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является данное алгебраическое число.

5. Дано алгебраическое число α. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — его минимальные многочлены. Докажите, что найдутся рациональные λ_1 и λ_2, такие что $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$. Будем обозначать минимальный многочлен для α буквой P, понимая, что он определен с точностью до пропорциональности.

6. Дано алгебраическое число α, P — его минимальный многочлен. Пусть $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(\deg P = n)$ — все (в том числе комплексные) корни многочлена P, т.е. сопряженные с α. Докажите, что P также является минимальным многочленом для каждого из $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.