

Ортоцентрический тетраэдр

0) Докажите, что если H - ортоцентр тетраэдра, O - центр описанной сферы, то

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$$

$$\text{и } \overline{HO} = \frac{1}{2}(\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} + \overline{HD}).$$

1) Докажите, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке (ортоцентрический тетраэдр) тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, равны.

2) Тетраэдр называется ортоцентрическим, если его высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что тетраэдр $ABCD$ ортоцентрический тогда и только тогда, когда две пары его противоположных рёбер перпендикулярны, т.е. $AB \perp CD$ и $AD \perp BC$ (в этом случае рёбра третьей пары также перпендикулярны, т.е. $AC \perp BD$).

3) Докажите, что ортоцентрическом тетраэдре общие перпендикуляры каждой пары противоположных рёбер пересекаются в одной точке.

4) Докажите, что точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр описанной сферы лежат на одной прямой, причем точка пересечения медиан - середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной сферы.

5) Докажите, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке (ортоцентрический тетраэдр) тогда и только тогда, когда равны произведения косинусов противоположных двугранных углов тетраэдра.

6) В тетраэдре одна из высот пересекает две другие. Докажите, что все высоты пересекаются в одной точке.

7) Высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника основания. Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.

8) Докажите, что противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ попарно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

9) Докажите, что грани описанного около ортоцентрического тетраэдра параллелепипеда - ромбы.