Векторная арифметика. Часть 1

Значок РК - разобрано в классе

1.(РК) Пусть M - точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=0$.

2. (РК) Пусть A, B, C и D — произвольные точки плоскости. Докажите, что $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}) = 0$.

Используя это тождество докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

3. (РК) Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

4. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма ABCD, O — произвольная точка. Докажите, что $\overrightarrow{OM} =\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

5.Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Докажите обратное утверждение (если в четырехугольнике сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов его диагоналей, то такой четырехугольник - параллелограмм).

6. Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OD окружности с центром O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=0$, то ABCD — прямоугольник.

7.(Теорема Стюарта.) Точка D лежит на стороне AB треугольника ABC. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что $AB \cdot CD^2 = AD \cdot CB^2 + BD \cdot CA^2 - AD \cdot BD \cdot AB$.

8. Докажите, что если M - точка пересечения медиан треугольника ABC, O - произвольная точка плоскости, то $\overrightarrow{OM} =\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Используя эту задачу и задачу 3 из класса докажите следующее утверждение (прямая Эйлера): в произвольном треугольнике точка пересечения высот H, точка пересечения медиан M и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, причем HM:MO=2:1.

9. Дан прямоугольник ABCD и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что PQ $\perp$ AB.

10. Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перепендикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.