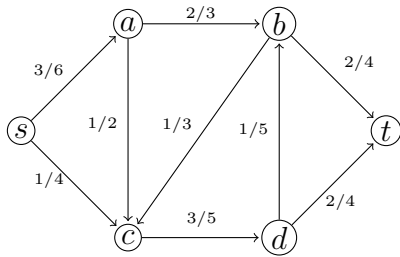
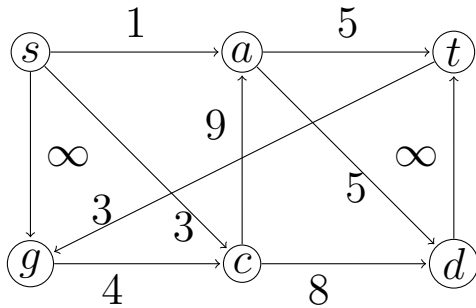


Максимальный поток, минимальный разрез. Задачи. 11Б, 11Г

1. Найти максимальный поток и минимальный разрез в указанном ниже графе между вершинами s и t . На каждом ребре через дробь записаны начальный поток и пропускная способность ребра.



2. Найдите максимальный поток и минимальный разрез в графе задачи 1 между вершинами s и t , считая это граф неориентированным (сотрите стрелки). На каждом ребре через дробь записаны начальный поток и пропускная способность ребра. Направление начального потока – согласно стрелке исходного орграфа.
3. Найдите максимальный поток и минимальный разрез в указанном ниже графе между вершинами s и t . На каждом ребре записана максимальная пропускная способность этого ребра.



4. Найдите максимальный поток и минимальный разрез в графе задачи 3 между вершинами s и t , считая это граф неориентированным (сотрите стрелки).
5. В гареме страны Ефегопа содержатся 70 женщин. 10 арабских шейхов выбирают себе жен, причем каждый шейх знает ровно половину гарема, а каждая женщина - ровно половину шейхов. По канонам страны Ефегопы каждая жена должна иметь ровно одного мужа, а каждый шейх - ровно 7 жен. Докажите, что арабских шейхов можно поженить по канонам Ефегопы, так, чтобы мужья и жены знали друг друга.
6. Теорема Холла (докажите): В группе есть некоторое одинаковое количество мальчиков и девочек, некоторые мальчики знакомы с некоторыми девочками. Докажите, что полное паросочетание мальчиков и девочек существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества мальчиков A верно: $|A| \leq |N(A)|$, где $N(A)$ - подмножество девочек, каждая из которых знает хотя бы одного мальчика из множества A . (Знаком модуля/мощности обозначается количество элементов в множестве)

7. ДЛЯ СУПЕР-ПРОФИ! В квадратной матрице A все элементы неотрицательны. Обозначим через $[A^k]_{ij}$ элемент, который в матрице A^k стоит на i -й строке и j -м столбце.

А) Докажите, что из следующих двух условий выполняется РОВНО одно:

1. $\forall i, j \exists k : [A^k]_{ij} > 0$

2. $\exists I, J \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}, I \cup J = \{1, 2, 3, \dots, n\}; I \cap J = \emptyset : \forall i \in I \quad \forall j \in J \quad a_{ij} = 0$, где n - размер матрицы A .

Б) Докажите, что если $\forall i, j \exists k : [A^k]_{ij} > 0$, то $\forall i, j \exists k \leq n - 1 : [A^k]_{ij} > 0$

Необходимый скилл: умение умножать матрицы. Если вы не знаете, как это делается, то лучше не приступайте к этой задаче:) Если всё равно хотите решать - спросите ассистентов.

8. БОНУСНАЯ С ЕГЭ! Найдите все натуральные числа a, b НОД(a, b) = 1 такие, что $a, b = b/a$.