Вводный листок

Перечисления

1. Каждую клетку квадратной таблицы 3×3 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

2. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую четность?

3. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

Остатки

4. Во сколько раз изменятся частное и остаток от деления, если делимое и делитель увеличить в 3 раза?

5. Докажите, что $n^3 - n$ делится на 6 при любом нечетном n.

6. Одно из чисел получается перестановкой цифр из другого. Может ли их сумма равняться 99...99 (999 девяток)?

Графы

7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

8. В некотором государстве каждый город соединен минимум с тремя другими. Докажите, что можно объехать несколько городов и вернуться в исходный город (который тоже есть возможность выбирать), проходя по каждой дороге не более одного раза и проезжая каждый город не более одного раза.

9. Существует ли граф с 5 вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2?

Конкурсная задача

Задача. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев должно пройти, чтобы каждые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

Погружающий листок

Перечисления

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо. Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?

2. Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

3. У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

(а) Сколькими способами он может выбрать трех из них: одного на завтрак, другого на обед и третьего на ужин?

(б) Сколько у него есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

Остатки

4. На бесконечной шахматной доске рядом по диагонали стоят две черные шашки. Можно ли поставить на эту доску еще несколько черных шашек и одну белую так, чтобы белая шашка одним своим ходом взяла все черные шашки?

5. Целые числа x, y таковы, что $x^2 + y^2 \,\vdots\, 7$. Докажите, что $xy \,\vdots\, 49$.

6. Докажите, что для любого натурального n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

Графы

7. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

8. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4×4 выкинуть угловые клетки. Можно ли обойти её ходом шахматного коня и вернуться на исходное поле, побывав на всех полях ровно по разу?

9. Докажите, что для графа следующие свойства равносильны:

(а) Любые две вершины соединены ровно одним путем.

(б) Граф связный и без циклов. Такой граф называется *деревом.*

Конкурсная задача

Задача №2. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Каково наименьшее количество номеров нужно перебрать, чтобы наверняка открыть камеру?

Углубляющий листок

Перечисления

1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо. Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

2. Дан треугольник ABC. На его стороне AB отмечено k точек, на стороне BC — l точек, на стороне CA — m точек. Все отмеченные точки отличны от вершин A, B, C. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

3. Сколько существует целых чисел от 1 до 10^{30}, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни пятой степенью?

Остатки

4. Целые числа a, b, c таковы, что $a^3+b^3+c^3 \vdots 7$. Докажите, что $abc \vdots 7$.

5. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что каждые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

6. Существует ли такое n, что n^2+n+1 делится на 2015?

Графы

7. В классе 25 человек. Известно, что среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого в классе не менее 12 друзей.

8. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть состоящую из одной части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

9. Докажите, что в любом дереве количество ребер на 1 меньше количества вершин.

Конкурсная задача

Задача №3. В тридесятом царстве ни одна из дорог не заканчивается тупиком. Странствующий рыцарь выезжает из своего замка и, доезжая до любого перекрестка, по очереди сворачивает то на самую левую, то на самую правую дорогу. Докажите, что в конце концов он попадет таким образом обратно в свой замок.

Расслабляющий листок

Перечисления

1. Сколькими способами класс из 25 человек можно разделить на 2 непустые не обязательно равные группы?

2. Сколько существует семизначных чисел, у которых цифры слева направо идут

(а) в порядке убывания?

(б) в порядке возрастания?

3. В ожесточенном бою более 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, более 75 — одно ухо, более 80 — одну руку и более 85 — одну ногу. Каково наименьшее количество пиратов, потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

Остатки

4. Может ли сумма $1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$ при каком-нибудь натуральном n оканчиваться цифрой 7?

5. За круглым столом сидят 25 мальчиков и 25 девочек. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа — мальчики.

6. Решите в целых числах уравнение $x^{100} + y^{100} = 3^{100}$.

Графы

7. Верно ли, что два графа изоморфны, если

(а) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 7?

(б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3?

8. В связном графе степени всех вершин чётны. Докажите, что на рёбрах этого графа можно расставить стрелки так, чтобы, двигаясь по стрелкам, можно было добраться от каждой вершины до любой другой.

9. Докажите, что из связного графа всегда можно удалить вершину (вместе со всеми выходящими из нее ребрами) так, чтобы он остался связным.

Конкурсная задача

Задача №4. Пусть $\mathcal{M}$ — конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит $\mathcal{M}$. Какое наибольшее число элементов может быть в $\mathcal{M}$?

Дополнительный листок

Перечисления

1. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

2. Раскроем скобки в выражении $(a+b+c+d+e)^m$.

(а) Сколько всего слагаемых получится?

(б) Какой коэффициент будет при $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon$ для данных $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$?

3. Никакие три диагонали выпуклого n-угольника не пересекаются в одной точке, отличной от вершины. Сколько всего точек пересечения (отличных от вершин) получится, если провести все диагонали?

Остатки

4. По кругу написаны n красных чисел, каждое из которых равно ± 1. Между каждыми двумя соседними красными записали синим цветом их произведение. Сумма n синих чисел равна 0. Докажите, что $n \vdots 4$.

5. Имеется 7 жетонов с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Докажите, что никакие два семизначных числа, составленные из этих жетонов, не делятся друг на друга.

6. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

Графы

7. В компании у каждых двух людей ровно пять общих знакомых. Докажите, что количество пар знакомых делится на 3.

8. Докажите, что на рёбрах связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться по стрелкам до любой другой.

Зачетный листок

Выполняется письменно. Запишите подробные решения.
Полностью верное решение каждого пункта каждой задачи приносит 3 балла.
Границы оценок: 23-27 баллов = «5», 18-22 баллов = «4», 13-17 баллов = «3».

Перечисления

1. Дано множество из 2015 элементов.

(а) Сколько у него подмножеств (включая пустое и всё множество)?

(б) Докажите, что $C_{2015}^0 + C_{2015}^1 + \ldots + C_{2015}^{2013} + C_{2015}^{2014} + C_{2015}^{2015} = 2^{2015}$

(в) Каких подмножеств больше: состоящих из 33 элементов или состоящих из 1982 элементов?

Остатки

2. (а) Решите уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ в целых x, y, z.

(б) Какие остатки дают квадраты целых чисел от деления на 8?

(в) Можно ли число 2015 представить в виде суммы квадратов трех целых чисел?

Графы

3. В некотором государстве имеется 200 городов.

(а) Какое наибольшее число дорог можно между ними провести?

(б) Какое наименьшее число дорог можно провести, чтобы от любого города можно было (возможно, с пересадками) проехать в любой другой?

(в) Какое наибольшее число дорог можно провести так, чтобы не от любого города можно было (возможно, с пересадками) проехать в любой другой?

Притча

В сутре Будда рассказал притчу: “Человек пересекал поле, на котором жил тигр. Он бежал со всех ног, тигр за ним. Подбежав к обрыву, он стал карабкаться по склону, уцепившись за корень дикой лозы, и повис на нем. Тигр фыркал на него сверху.

Дрожа, человек смотрел вниз, где другой тигр поджидал его, чтобы съесть. Только лоза удерживала его. Две мышки, одна белая, другая черная, понемногу стали подгрызать лозу. Человек увидел возле себя ароматную землянику. Уцепившись одной рукой за лозу, другой он стал рвать землянику.

Какая же она была сладкая!

Зачетный тест

Вариант 1

1. В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 6 школьников, сыграно 10 партий. Известно, что каждый участник сыграл не менее двух встреч, Ваня провел 4 встречи, а Миша — 3. Сыграл ли еще кто-нибудь, кроме Вани, больше, чем Миша, если Ваня и Миша между собой не встречались?

2. Четным или нечетным является число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий?

3. Для отправки поздравления есть конверты трех видов, на которые клеится одна из двух марок и в которые вкладывается одна из четырех открыток. Сколько существует способов сделать поздравление по почте?

4. Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

5. Сколько всего существует семизначных чисел, состоящих из 4 единиц и 3 нулей?

Притча

В сутре Будда рассказал притчу: "Человек пересекал поле, на котором жил тигр. Он бежал со всех ног, тигр за ним. Подбежав к обрыву, он стал карабкаться по склону, уцепившись за корень дикой лозы, и повис на нем. Тигр фыркал на него сверху.

Дрожа, человек смотрел вниз, где другой тигр поджидал его, чтобы съесть. Только лоза удерживала его. Две мышки, одна белая, другая черная, понемногу стали подгрызать лозу. Человек увидел возле себя ароматную землянику. Уцепившись одной рукой за лозу, другой он стал рвать землянику.

Какая же она была сладкая!

Зачетный тест

Вариант 2

1. В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 5 школьников, сыграно 6 партий. Больше всего встреч провели Ваня и Миша – по 3. Какое число партий сыграл участник, проведший наименьшее число встреч?

2. Марсиане очень любят танцевать танцы, в которых нужно браться за руки. В танце «Пирамидка» может участвовать не более 7 марсиан, у каждого из которых не более трёх рук. Какое наибольшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина.

3. В подарок для первоклассника на 1 сентября входит книжка (одна из четырех видов) и открытка (одна из трех видов). Книжка и открытка вручаются в красивом пакетике двух видов: голубой и розовый. Можно ли подарить различные подарки 25 первоклассникам?

4. Докажите, что если к произвольному трехзначному числу приписать число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то результат будет делиться на 11.

5. Сколькими способами можно составить цепочку из 7 красных и 3 синих бусинок, чтобы рядом не было синих бусинок?

Притча

В сутре Будда рассказал притчу: "Человек пересекал поле, на котором жил тигр. Он бежал со всех ног, тигр за ним. Подбежав к обрыву, он стал карабкаться по склону, уцепившись за корень дикой лозы, и повис на нем. Тигр фыркал на него сверху.

Дрожа, человек смотрел вниз, где другой тигр поджидал его, чтобы съесть. Только лоза удерживала его. Две мышки, одна белая, другая черная, понемногу стали подгрызать лозу. Человек увидел возле себя ароматную землянику. Уцепившись одной рукой за лозу, другой он стал рвать землянику.

Какая же она была сладкая!

Зачетный тест

Вариант 3

1. В шахматном турнире по круговой системе, в котором участвуют 6 школьников. Известно, что Кеша сыграл 5 партий, Толя — 4, Семен — 2, Вася — 1. Сколько встреч провели еще 2 участника: Андрей и Саша?

2. В танце «Большая Пирамида» может участвовать не менее 7 марсиан, у каждого из которых не менее пяти рук. Какое наименьшее число рук может быть у танцующих, если любая рука одного марсианина держит ровно одну руку другого марсианина.

3. В новогодний подарок для первоклассника входит одна игрушка, одна шоколадка и одна книжка. Для формирования подарков купили игрушки четырех видов, шоколадки двух сортов и книги трех авторов. В классе 25 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них получат одинаковые подарки.

4. Число при делении на 4 дает остаток 3. Какой остаток оно дает при делении на 8?

5. Сколько всего существует семизначных чисел, состоящих из 3 единиц и 4 нулей?

Притча

В сутре Будда рассказал притчу: “Человек пересекал поле, на котором жил тигр. Он бежал со всех ног, тигр за ним. Подбежав к обрыву, он стал карабкаться по склону, уцепившись за корень дикой лозы, и повис на нем. Тигр фыркал на него сверху.

Дрожа, человек смотрел вниз, где другой тигр поджидал его, чтобы съесть. Только лоза удерживала его. Две мышки, одна белая, другая черная, понемногу стали подгрызать лозу. Человек увидел возле себя ароматную землянику. Уцепившись одной рукой за лозу, другой он стал рвать землянику.

Какая же она была сладкая!

Зачетный тест

Вариант 4

1. В шахматном турнире по круговой системе участвуют 5 школьников. Известно, что Миша и Саша провели по 4 встречи, Костя и Женя — по 3, Ваня — 2. С кем сыграл Ваня?

2. Можно ли на плоскости нарисовать 7 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

3. Монету бросают три раза. Сколько различных последовательностей орлов и решек можно получить? Выпишите их.

4. Число при делении на 8 дает остаток 7. Какой остаток оно дает при делении на 4?

5. Сколькими способами можно составить цепочку из 7 красных и 3 синих бусинок?

Притча

В сутре Будда рассказал притчу: "Человек пересекал поле, на котором жил тигр. Он бежал со всех ног, тигр за ним. Подбежав к обрыву, он стал карабкаться по склону, уцепившись за корень дикой лозы, и повис на нем. Тигр фыркал на него сверху.

Дрожа, человек смотрел вниз, где другой тигр поджидал его, чтобы съесть. Только лоза удерживала его. Две мышки, одна белая, другая черная, понемногу стали подгрызать лозу. Человек увидел возле себя ароматную землянику. Уцепившись одной рукой за лозу, другой он стал рвать землянику.

Какая же она была сладкая!

Домашнее задание

1. В шахматном турнире по круговой системе участвуют 8 школьников. Известно, что Миша и Леша, Илья и Женя сыграли между собой. Кроме этого, известно, что Ваня провел 7 встреч; Саша — 5; Илья, Женя, Аркадий и Петя — по 3; Миша и Леша — по 2. Кто с кем сыграл?

2. В парке 9 озер. Каждое озеро соединено с другими озерами не менее чем тремя каналами. Какое наименьшее количество каналов может быть в парке?

3. В баскетбольной команде 8 игроков. Сколько есть вариантов выбрать из них капитана и его заместителя?

4. Некоторое число при делении на 15 дает остаток 7. Какой остаток оно дает при делении на 5?

5. Сколько существует различных прямоугольников с целыми сторонами и периметром, равным 2014?

Ученый диалог за ночлег

Любой странствующий монах мог остановиться в дзенском храме при условии, что он будет победителем тех, кто живет в этом храме. Если же он будет побежден, ему придется уйти.

В одном храме на севере Японии жили два брата монаха. Старший брат учился, а младший был дурачком, да и к тому же еще и одноглазый. Однажды к ним зашел странствующий монах и попросился переночевать, предложив, в соответствии с обычаем, побеседовать о возвышенном учении.

Старший брат, уставший от занятий за день, велел младшему выступить вместо себя.

— Пойди и потребуй разговора в молчании, — научил он его.

Итак, младший брат и странник пошли к святыне и сели.

Вскоре странник поднялся, подошел к старшему брату и сказал:

— Твой младший брат удивительный парень. Он победил меня.

— Перескажи мне диалог, — попросил старший брат.

— Сначала, — сказал странник, — я поднял один палец, символизируя просветленного Будду. Тогда твой брат поднял два пальца, символизируя Будду и его учение. Я поднял три пальца, символизируя Будду, его учение и его последователей, живущих гармонической жизнью. Тогда твой брат потряс сжатым кулаком у меня перед лицом, указывая, что все три произошли из одной реализации. Таким образом он победил, и я не имею права оставаться здесь.

С этими словами странник ушел.

— Где этот парень? — спросил младший брат, вбегая к старшему.

— Я понял от него, что ты победил в споре.

— Ничего я не победил. Я хочу поколотить его.

— Расскажи мне, о чем вы спорили, — попросил старший брат.

— Ну, минуту он смотрел на меня, потом поднял один палец, оскорбляя меня намеком на то, что у меня один глаз. Так как он странник, то я подумал, что мне надо быть повежливее с ним. Поэтому я поднял два пальца, поздравляя его с тем, что у него два глаза. Тогда этот грубиян и негодяй поднял три пальца, намекая на то, что на нас двоих у нас только три глаза. Тогда я взбесился и стал колотить его, а он убежал. На этом все кончилось.

Хорошего понимания!

Домашний листок

Перечисления

6. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых четна?

7. Труппа театра состоит из 20 артистов. Сколькими способами можно выбрать из нее в течение двух вечеров по 6 человек для участия в спектаклях так, чтобы ни один артист не участвовал в двух спектаклях?

Остатки

8. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.

9. Найдите все пары натуральных m, n, таких что $1! + 2! + 3! + ... + m! = n^2$.

Графы

10. В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединён авиалиниями ровно с десятью городами. Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

11. Все клетки бесконечной клетчатой бумаги покрашены в один из 10 цветов, все 10 цветов присутствуют. Будем говорить, что цвета Ъ и Ы соседствуют, если найдутся две клетки с общей стороной, одна из которых покрашена в цвет Ъ, а другая — в Ы. Какое наименьшее количество пар соседствующих цветов (из 45 возможных пар цветов) может быть?

Нельзя украсть луну

Рёнан, дзенский мастер, жил самой простой жизнью в маленькой хижине у подножья горы. Однажды вечером в хижину забрался вор и обнаружил, что там нечего украсть. Вернувшись, Рёнан застал у себя вора.

— Ты прошел долгий путь, чтобы навестить меня, — сказал он бродяге, — и ты не должен вернуться с пустыми руками. Пожалуйста, возьми в подарок мою одежду.

Вор был ошарашен. Он взял одежду и тихонько ушел.

Рёнан сидел нагой, любуясь луной.

— Бедный парень, — задумчиво сказал он. — Мне бы так хотелось подарить ему эту прекрасную Луну.

Удачного решения!

Дружеский математический бой. FULL

1. Влада и Ната играют в игру. Они по очереди слева направо записывают цифры: либо единицу, либо двойку. Проигрывает тот, после чьего хода несколько последних цифр составляют число, делящееся на 7 без остатка. Влада ходит первым. Может ли кто-нибудь из игроков победить, как бы ни играл соперник?

2. Дана дробь $^1\!/_3$. Разрешены операции:

(i) увеличить числитель на 2015,

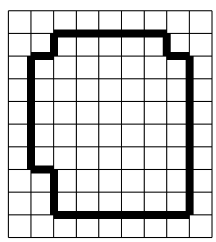
(ii) увеличить знаменатель на 2016,

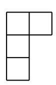
(iii) сократить дробь.

Можно ли с помощью только этих операций получить дробь $^5\!/_8$?

3. Имеется клетчатый прямоугольник 2014×2015. Его разрезали на несколько квадратов по линиям сетки. Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной могло оказаться после разрезания?

4. Можно ли разрезать фигуру



на тетрамино  ? Тетрамино разрешается поворачивать и переворачивать.

5. Про числа $a, b, c \in \mathbb{R}$ известно, что $\dfrac{a}{b+c-a} = \dfrac{b}{c+a-b} = \dfrac{c}{a+b-c}$. Какие значения может принимать выражение $^{(a+b)(b+c)(c+a)}\!/_{abc}$?

6. Множество A состоит из всех шестизначных чисел с суммой цифр 47 и всех пятизначных чисел с суммой цифр 38; множество B состоит из всех шестизначных чисел с суммой 45 и всех пятизначных чисел с суммой цифр 36. В каком множестве больше элементов: A или B?

7. Дан равносторонний треугольник ABC. На его сторонах AB, BC и CA взяты точки P, Q, R такие, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Докажите, что у треугольника PQR стороны пепендикулярны сторонам треугольника ABC.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD выбрана точка E, для которой $BE > AB$. Известно, что $AC > CD$. Докажите, что $ED < 2BC$.

Prijateljska matematička bitka. FULL

1. Vlada i Nata igraju u igru. Oni naizmenično upisuju sleva na desno cifre: ili jedinicu, ili dvojku. Gubi onaj posle čijeg poteza nekoliko poslednjih cifara daju broj deljiv sa 7 bez ostatka. Počinje Vlada. Da li jedan od igrača može da pobedi bez obzira na igru protivnika?

2. Dat je razlomak ${}^{1}/_{3}$. Dozvoljene su operacije:

(i) povećati brojilac za 2015,

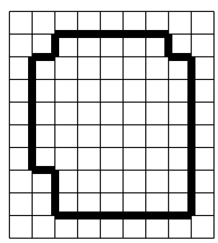
(ii) povećati imenilac za 2016,

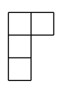
(iii) skratiti razlomak.

Da li se pomoću samo tih operacija može dobiti razlomak ${}^{5}/_{8}$?

3. Pravougaona tabla 2014×2015 je podeljena na nekoliko kvadrata duž linija mreže. Koji se najmanji mogući broj kvadrata sa neparnom stranicom mogao dobiti?

4. Da li se figura



moze podeliti na tetramino  ? Dozvoljeno je okretati tetramino.

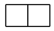
5. Brojevi $a, b, c \in \mathbb{R}$ su takvi da je $\dfrac{a}{b+c-a} = \dfrac{b}{c+a-b} = \dfrac{c}{a+b-c}$. Koje vrednosti može da prima izraz ${}^{(a+b)(b+c)(c+a)}/_{abc}$?

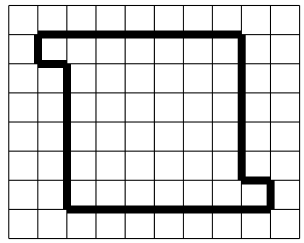
6. Skup A sadrzi sve šestocifrene brojeve ciji je zbir cifara 47 i sve petocifrene brojeve ciji je zbir cifara 38; skup B sadrzi sve šestocifrene brojeve ciji je zbir cifara 45 i petocifrene brojeve ciji je zbir cifara 36. Koji skup ima vise elemenata: A ili B?

7. Dat je jednakostraničan trougao ABC. Na njegovim stranicama AB, BC i CA uzete su tačke P, Q, R takve da je $AP : PB = BQ : QC = CR : RA = 2 : 1$. Dokazati da su stranice trougla PQR uspravne ka stranicama trougla ABC.

8. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ na stranici AD odabrana je tačka E takva da je $BE > AB$. Takodje je $AC > CD$. Dokazati da je $ED < 2BC$.

Дружеский математический бой. LITE

1. Можно ли фигуру на рисунке разрезать на домино (прямоугольники 2×1, т.е. )?



2. Имеется прямоугольная доска $m \times n$, причем m и n нечетны. Двое играют в игру: можно закрасить любую клетку, которая имеет ровно одну общую сторону с уже закрашенной клеткой. Первой можно закрасить любую клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия: у начинающего или его соперника?

3. Русская делегация отправилась в пеший поход по Белграду. В первый час они прошли $^1\!/_3$ всего пути, во второй час они прошли $^1\!/_3$ остатка, в третий $^1\!/_3$ от нового остатка. В результате им осталось пройти $^5\!/_3$ км. Какова длина всего маршрута?

4. Марина решила сварить суп. Для этого ей надо налить ровно 5 л в кастрюлю. Как ей это сделать, если кастрюля вмещает в себя максимум 7 литров, но еще у нее есть 3-литровая банка?

Краткое напоминание правил

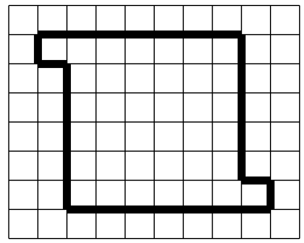
Команды по очереди вызывают соперников на какую-либо из еще не разобранных задач. Команда может либо принять вызов, либо сделать *проверку корректности*. Команда, принявшая вызов, выставляет докладчика, соперники — оппонента. Если команда требует проверку корректности, то она выставляет оппонента, а соперники — докладчика. В любой момент раунда у доски находятся и общаются два человека; кроме них и жюри, в дискусии не участвует **никто**. Каждый участник может выходить к доске не более двеух раз.

Далее докладчик, оппонент и жюри справедливо разыгрывают 12 очков за данную задачу: сначала слово предоставляется докладчику (для рассказа решения — примерно 10 минут), затем оппоненту (для дискуссии с докладчиком - примерно 10 минут), затем начинает разбираться жюри (сколько потребуется). Возможны перемены ролей, если это не была проверка корректности.

Жюри всё время играет роль высшего разума, указания жюри обязаны к исполнению.

Prijateljska matematička bitka. LITE

1. Da li se figura na slici moze podeliti na domino (pravougaonike 2×1, odnosno)?



2. Data je pravougaona tabla $m \times n$, gde su m i n neparni. Dva igrača u jednom potezu mogu da oboje bilo koje polje koje ima tacno jednu zajedničku stranicu sa već obojenim poljima. U prvom potezu moze se obojiti bilo koje polje. Gubi onaj ko ne može da napravi dozvoljeni potez. Koji od igrača ima pobedničku strategiju: onaj ko pocinje ili njegov suparnik?

3. Ruska delegacija je krenula u šetnju po Beogradu. U toku prvog sata prešli su $1/3$ puta, u toku drugog sata su prešli $1/3$ ostatka, u toku trećeg $1/3$ novog ostatka. Preostalo im je da predju $5/3$ km. Koja je dužina cele maršrute?

4. Marina je odlucila da skuva supu. Za to joj je potrebno sipati 5 l vode u šerpu. Kako da to uradi ako u šerpu staje najviše 7 litara, a Marina još ima teglu od 3 l?

Kratki podsetnik pravila

Ekipe naimenično izazivaju protivnike na bilo koji od neiskorišćenih zadataka. Ekipa može ili da primi izazov ili da zatraži *proveru ispravnosti*. Ako ekipa prima izazov onda jedan od njenih članova postaje izvestiocem, a jedan od članova protivničke ekipe postaje oponentom. Ako ekipa traži proveru isravnosti onda jedan od njenih članova postaje oponentom, a jedan od članova protivničke ekipe — izvestiocem. U svakom trenutku u toku runde ispred table se nalaze svega dvoje; osim njih i žirija **niko** ne učestvuje u diskusiji. Svaki učesnik može izlaziti pred tablu najviše dva puta.

Dalje izvestilac, oponent i žiri pošteno dele 12 bodova za tekući zadatak: prvo izvestilac objasni svoje rešenje (za to ima oko 10 minuta), onda oponent postavlja pitanja, trudeći se da pronadje bilo koju grešku u rešenju izvestioca (oko 10 minuta), i na kraju žiri razmatra rešenje. Moguća je izmena uloga ako nije bila provera ispravnosti.

Žiri sve vreme igra ulogu višeg razuma i njegove odluke se moraju poštovati.