

**Кубок Математической гимназии**  
**- Математика -**  
**БЕЛГРАД 23 июня 2015**

ЧАСТЬ 1

*Задачи с 1 по 8 имеют несколько вариантов ответа. Из 5 предложенных вариантов в каждой задаче только один является правильным. На листе с ответами Вы должны обвести только ту букву, которая соответствует ответу, который Вы выбрали.*

1. Какая последняя цифра у числа  $333^{33}$ ?

- (A) 1;                      (B) 3;                      (C) 5;                      (D) 7;                      (E) 9.

2.  $x$  и  $y$  положительные действительные числа. Известно, что  $x^2 + y^2 = 87$  и  $xy = 30$ . Чему равна сумма  $x + y$ ?

- (A)  $3\sqrt{7}$ ;                      (B)  $\sqrt{87}$ ;                      (C)  $7\sqrt{3}$ ;                      (D)  $8\sqrt{5}$ ;                      (E)  $10\sqrt{2}$ .

3. Если числитель  $a$  дроби  $\frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ ) увеличить на 20%, а знаменатель  $b$  уменьшить на 20%, то на сколько процентов увеличится дробь?

- (A) 40%;                      (B) 20%;                      (C) 25%;                      (D) 36%;                      (E) 50%.

4. Уравнение  $|2x + 5| = x + 5$  имеет:

- (A) ровно одно отрицательное решение;                      (B) ровно одно положительное решение;  
(C) ровно одно решение  $x = 0$ ;                      (D) два решения;                      (E) не имеет решений.

5. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 12, 8 и 6. Объем этого параллелепипеда равен:

- (A) 24;                      (B) 26;                      (C) 42;                      (D) 44;                      (E) 48.

6. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Площадь этого треугольника равна:

- (A) 84;                      (B) 90;                      (C) 120;                      (D) 150;                      (E) 180.

7. Число всех пар  $(m, n)$  натуральных чисел  $m$  и  $n$  таких, что  $(m - 8)(m - 10) = 2^n$ , равно:  
(A) 0;                      (B) 1;                      (C) 2;                      (D) 3;                      (E) 4 или больше.
8. В прямоугольной трапеции  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны друг другу. Если  $AB = 9$  и  $CD = 4$ , то  $AD$  равно:  
(A) 5;                      (B)  $5\sqrt{2}$ ;                      (C) 6;                      (D)  $5\sqrt{3}$ ;                      (E) 8.

## ЧАСТЬ 2

9. Найдите все натуральные  $n$  такие, что последняя цифра (в десятичной записи) в сумме  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  равна 7.
10. Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — точки касания вписанной окружности в треугольник  $ABC$  со сторонами  $BC = a, AC = b, AB = c$  соответственно. Пусть  $AC_1 = p, BA_1 = q, CB_1 = r$ . Докажите следующее неравенство:

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} \geq \frac{3}{2}$$

Когда достигается равенство?

11. Покажите, что существует число вида  $\underbrace{77 \dots 77}_n$ , которое делится на 2017.  
 $n$  семёрок
12. Марьяна решила, что в июне она будет учиться 23 дня, а остальные дни отдыхать. Сколькими способами она может выбрать 7 дней для отдыха, если она решила, что никогда не будет отдыхать 2 дня подряд?