

Кубок Математической гимназии
- Математика -
БЕЛГРАД 23 июня 2015

ЧАСТЬ 1

Задачи с 1 по 8 имеют несколько вариантов ответа. Из 5 предложенных вариантов в каждой задаче только один является правильным. На листе с ответами Вы должны обвести только ту букву, которая соответствует ответу, который Вы выбрали.

1. Какая последняя цифра у числа 333^{33} ?

- (A) 1; (B) 3; (C) 5; (D) 7; (E) 9.

2. x и y положительные действительные числа. Известно, что $x^2 + y^2 = 87$ и $xy = 30$. Чему равна сумма $x + y$?

- (A) $3\sqrt{7}$; (B) $\sqrt{87}$; (C) $7\sqrt{3}$; (D) $8\sqrt{5}$; (E) $10\sqrt{2}$.

3. Если числитель a дроби $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) увеличить на 20%, а знаменатель b уменьшить на 20%, то на сколько процентов увеличится дробь?

- (A) 40%; (B) 20%; (C) 25%; (D) 36%; (E) 50%.

4. Уравнение $|2x + 5| = x + 5$ имеет:

- (A) ровно одно отрицательное решение; (B) ровно одно положительное решение;
(C) ровно одно решение $x = 0$; (D) два решения; (E) не имеет решений.

5. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 12, 8 и 6. Объем этого параллелепипеда равен:

- (A) 24; (B) 26; (C) 42; (D) 44; (E) 48.

6. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Площадь этого треугольника равна:

- (A) 84; (B) 90; (C) 120; (D) 150; (E) 180.

7. Число всех пар (m, n) натуральных чисел m и n таких, что $(m - 8)(m - 10) = 2^n$, равно:
 (A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4 или больше.
8. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом при вершине A диагонали AC и BD перпендикулярны друг другу. Если $AB = 9$ и $CD = 4$, то AD равно:
 (A) 5; (B) $5\sqrt{2}$; (C) 6; (D) $5\sqrt{3}$; (E) 8.

ЧАСТЬ 2

9. Найдите все натуральные n такие, что последняя цифра (в десятичной записи) в сумме $1 + 2 + 3 + \dots + n$ равна 7.
10. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности в треугольник ABC со сторонами $BC = a, AC = b, AB = c$ соответственно. Пусть $AC_1 = p, BA_1 = q, CB_1 = r$. Докажите следующее неравенство:

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} \geq \frac{3}{2}$$

Когда достигается равенство?

11. Покажите, что существует число вида $\underbrace{77 \dots 77}_n$, которое делится на 2017.

12. Марьяна решила, что в июне она будет учиться 23 дня, а остальные дни отдыхать. Сколькими способами она может выбрать 7 дней для отдыха, если она решила, что никогда не будет отдыхать 2 дня подряд?