Зачетная олимпиада

Сдача задач — устная. Задача считается сданной, если в решении не обнаружено изъянов. Количество попыток по каждой задаче не ограничено, если при каждой новой попытке есть продвижение. В рамках каждой темы задачи субъективно упорядочены по возрастанию сложности.

Алгебра

1. x_1 — вещественный корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, x_2 — вещественный корень уравнения $x^2 - ax - b = 0$. Доказать, что уравнение $x^2 + 2ax + 2b = 0$ имеет вещественный корень, заключённый между x_1 и x_2. (a и b — вещественные числа).

2. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

3. Рассмотрим многочлены $C_x^k = {x(x-1)\cdots(x-k+1)}/{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Докажите, что любой многочлен $P(x) \not\equiv 0$, такой что для любого $x \in \mathbb{Z}$ выполнено $P(x) \in \mathbb{Z}$, единственным образом представляется в виде

$$P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}\,.$$

4. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что выполнено неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Геометрия

5. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

6. Три окружности S_1, S_2 и S_3 попарно касаются друг друга в трех различных точках. Докажите, что прямые, соединяющие точку касания окружностей S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами ее диаметра.

7. Из произвольной точки O вписанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры OA', OB', OC' на стороны треугольника ABC и перпендикуляры OA'', OB'', OC'' на стороны треугольника с вершинами в точках касания. Докажите, что $OA' \cdot OB' \cdot OC' = OA'' \cdot OB'' \cdot OC''$.

8. Дан треугольник ABC. На его стороне AB выбирается точка P и через нее проводятся прямые PM и PN, параллельные AC и BC соответственно (точки M и N лежат на сторонах BC и AC); Q — точка пересечения описанных окружностей треугольников APN и BPM. Докажите, что все прямые PQ проходят через фиксированную точку.

Теория чисел

9. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ – два набора натуральных чисел, полученных некоторыми перестановками из набора $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Докажите, что какие-нибудь два из чисел $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$, $\ldots$, $a_{2n} + b_{2n}$ дают при делении на $2n$ одинаковые остатки.

10. Можно ли записать по кругу числа 1, 2, $\ldots$, 12 так, чтобы для любых трех подряд стоящих чисел a, b, c число $b^2 - ac$ делилось на 13?

11. Выясните, является ли 2015 квадратичным вычетом или невычетом по модулю 37.

12. Дано простое число $p > 3$. Положим $n = (2^{2p} - 1)/3$. Докажите, что число $(2^n - 2)/n$ целое.

Комбинаторика

13. План города имеет схему, представляющую собой прямоугольник 5×10 клеток. На улицах введено одностороннее движение: разрешается ехать только вправо и вверх. Сколько есть различных маршрутов, ведущих из левого нижнего угла в правый верхний?

14. Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}$?

15. В классе 25 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один ученик не сел на своё место?

16. Пусть $p(n)$ — количество разбиений числа n. Докажите равенство

$$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \ldots = (1 - x)^{-1}(1 - x^2)^{-1}(1 - x^3)^{-1} \ldots$$

(По определению считается, что p(0) = 1.)

Интересная задача

17. Дано множество $\mathcal{M}$ из 133 элементов. Докажите, что для некоторого k можно выбрать 133 k-элементных подмножеств $\mathcal{M}$ так, чтобы любые два пересекались ровно по одному элементу.

Подсказка. Это комбинаторное свойство некоторой конструкции, в которой одновременно задействованы и алгебра, и геометрия, и теория чисел. Не пытайтесь решить задачу «напролом».