Алгебра

Квадратные трехчлены

1. На координатной плоскости xOy построена парабола $y = x^2$. Затем начало координат и оси стёрли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки (используя имеющуюся параболу)?

2. Докажите, что квадратные трёхчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют вещественные корни, причём между двумя корнями каждого из них лежит корень другого, если и только если для чисел p_1, p_2, q_1 и q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0.$$

3. Определите $\min\limits_{p,q\in\mathbb{R}} \max\limits_{x\in[-1,1]} \left|x^2 + px + q\right|$.

Многочлены

4. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, что уравнение

$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_{10}) = (x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdots (x + a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных решений.

5. Про многочлен $P(x)$ известно, что $\forall t\ P(\cos t) = P(\sin t)$. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$, такой что

$$P(x) = Q(x^2 - x^4).$$

Функциональные уравнения

6. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, удовлетворяющие условиям

$$f(1) = 2 \qquad \text{и} \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1.$$

Неравенства

8. Предположим, что положительные числа a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n удовлетворяют условию $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = S$. Докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{S}{2}.$$

9. Для положительных a, b, c, d докажите $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} \geqslant 2.$

Алгебра

Квадратные трехчлены

1. На координатной плоскости xOy построена парабола $y = x^2$. Затем начало координат и оси стёрли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки (используя имеющуюся параболу)?

2. Докажите, что квадратные трёхчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют вещественные корни, причём между двумя корнями каждого из них лежит корень другого, если и только если для чисел p_1, p_2, q_1 и q_2 выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1) < 0.$$

3. Определите $\min\limits_{p,q\in\mathbb{R}} \max\limits_{x\in[-1,1]} \left|x^2 + px + q\right|$.

Многочлены

4. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, что уравнение

$$(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_{10}) = (x + a_1) \cdot (x + a_2) \cdots (x + a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных решений.

5. Про многочлен $P(x)$ известно, что $\forall t\ P(\cos t) = P(\sin t)$. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$, такой что

$$P(x) = Q(x^2 - x^4).$$

Функциональные уравнения

6. Найдите все $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие $f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, удовлетворяющие условиям

$$f(1) = 2 \qquad \text{и} \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1.$$

Неравенства

8. Предположим, что положительные числа a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n удовлетворяют условию $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = S$. Докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{S}{2}.$$

9. Для положительных a, b, c, d докажите $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + d} + \dfrac{c}{d + a} + \dfrac{d}{a + b} \geqslant 2.$