Окружности, вписанные в сегменты

Задачи и пункты для сдачи помечены $^\bullet$.

Теорема Виктора Тебо[1]

1. *(воспоминания из начальной школы)* Дана окружность. Через точку N внутри этой окружности проведены две прямые. Докажите, что угол между ними равен полусумме дуг, высекаемых прямыми из окружности. А что можно сказать, если точка N вне окружности? А про угол между касательной и хордой?

2. *(лемма Архимеда)* В окружности проведена хорда AB. Другая окружность касается отрезка AB в точке K и окружности в точке L. Докажите, что прямая KL проходит через середину дуги, дополняющей дугу ALB до окружности.

3. *(лемма о трезубце)* Середина дуги BC (не содержащая точки A) описанной окружности треугольника ABC равноудалена от B, C и центра вписанной окружности..

4. Подсказки.
(a$^\bullet$) Дан треугольник ABC и прямая CD (точки D и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC). Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается прямой CD, если и только если $\angle ABC = \angle ACD$.
(b$^\bullet$) Пусть AC — хорда окружности. B_1 — середина дуги AC. Прямая, проходящая через B_1, пересекает AC в точке K и окружность в точке N. Докажите, что $B_1K \cdot B_1N = B_1C^2$.
(c$^\bullet$) Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. B_1 — середина дуги AC окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая, проходящая через B_1, пересекает AC в точке K и описанную окружность в точке N. Докажите, что $\angle BIN = \angle IKN$.

5.$^\bullet$ *(лемма о сегменте)* Пусть D — точка на стороне AC треугольника ABC. Рассмотрим окружность, касающуюся отрезков BD, DC и окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть M и K — точки касания этой окружности с BD и DC соответственно. Докажите, что прямая MK проходит через точку I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

6.$^\bullet$ *(теорема Виктора Тебо)* Пусть ABC — произвольный треугольник. D — произвольная точка на стороне AC. I_1 — центр окружности, касающейся отрезков AD, BD и описанной около треугольника ABC окружности. I_2 — центр окружности, касающейся отрезков CD, BD и описанной около треугольника ABC окружности. Тогда отрезок I_1I_2 проходит через точку I —

[1] Victor Thébault

центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и при этом отношение $I_1I : II_2 = \operatorname{tg}^2 \varphi/2$, где $\varphi = \angle BDA$.

Задачи

7.$^\bullet$ В окружности проведена хорда. В оба образовавшихся сегмента вписаны окружности. Прямые, проходящие через точки касания этих окружностей с данной и хордой повторно пересекают данную окружность в точках A и B. Докажите, что AB — диаметр данной окружности.

8.$^\bullet$ В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I —центр вписанной окружности, M — середина стороны AC, N — середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$. *(IV этап Всероссийской, 9 класс, 2005)*

9.$^\bullet$ На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC. *(V этап Всероссийской, 10 класс, 2006)*

10.$^\bullet$ Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC. *(IV этап Всероссийской, 9 класс, 2006)*

11.$^\bullet$ На диаметре AB окружности S взята точка K и из нее восстановлен перпендикуляр, пересекающий S в точке L. Окружности S_A и S_B касаются окружности S, отрезка LK и диаметра AB, а именно, S_A касается отрезка AK в точке A_1, S_B касается отрезка BK в точке B_1. Докажите, что $\angle A_1LB_1 = 45°$.

12.$^\bullet$ Окружность касается продолжений сторон CA и CB треугольника ABC, а также касается стороны AB этого треугольника в точке P. Докажите, что радиус окружности, касающейся отрезков AP, CP и описанной около этого треугольника окружности равен радиусу вписанной в этот треугольник окружности. *(Соросовская олимпиада, 1998)*