Цепные дроби

Первая часть

Пусть $\alpha \in \mathbb{I}$ раскладывается в цепную дробь $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$.

1. Докажите, что подходящие дроби ${}^{p_n}\!/_{q_n}$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots < \frac{p_{\text{четное}}}{q_{\text{четное}}} < \ldots < \alpha < \ldots < \frac{p_{\text{нечетное}}}{q_{\text{нечетное}}} < \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

2. Докажите, что числители и знаменатели подходящих дробей возрастают:

$$p_0 < p_1 < p_2 < \ldots; \qquad q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$$

3. Докажите, что $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{\pm 1}{q_n q_{n+1}}$.

Вторая часть

4. Докажите, что подходящие дроби для $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$ — суть дроби вида ${}^{F_n}\!/_{F_{n-1}}$, где F_k — числа Фибоначчи.

5. Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, для которого $\exists m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\sqrt{2} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{297}{210}$.

6. Известно, что выражение $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$ задает некоторое число. Найдите это число.

Цепные дроби

Первая часть

Пусть $\alpha \in \mathbb{I}$ раскладывается в цепную дробь $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$.

1. Докажите, что подходящие дроби ${}^{p_n}\!/_{q_n}$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots < \frac{p_{\text{четное}}}{q_{\text{четное}}} < \ldots < \alpha < \ldots < \frac{p_{\text{нечетное}}}{q_{\text{нечетное}}} < \ldots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

2. Докажите, что числители и знаменатели подходящих дробей возрастают:

$$p_0 < p_1 < p_2 < \ldots; \qquad q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$$

3. Докажите, что $\dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{\pm 1}{q_n q_{n+1}}$.

Вторая часть

4. Докажите, что подходящие дроби для $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$ — суть дроби вида ${}^{F_n}\!/_{F_{n-1}}$, где F_k — числа Фибоначчи.

5. Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, для которого $\exists m \in \mathbb{Z}$ такое, что $\sqrt{2} < \dfrac{m}{n} < \dfrac{297}{210}$.

6. Известно, что выражение $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$ задает некоторое число. Найдите это число.