0. Пусть M – середина AH, D – середина BC. Докажите, что $DM \perp B'C'$, где B' и C' – основания соответствующих высот.

Ортотреугольник

Там, где это не оговорено, будем считать, что дан треугольник ABC, его ортоцентр H, центр вписанной окружности I, центр описанной окружности O, а углы $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$.

1. Углы треугольника равны α, β, γ. Каковы углы ортотреугольника?

2. Восстановите треугольник по центрам вневписанных окружностей.

3. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно **(а)** сторон, **(б)** середин сторон, лежат на описанной окружности.

4. Восстановите треугольник по точкам, симметричным ортоцентру относительно середин сторон треугольника.

5. Три равные окружности пересекаются в точке H. A, B, C — их вторые точки пересечения. Докажите, что окружность, описанная около $\triangle ABC$, равна исходным.

6. **Лемма о куриной лапке.** Пусть $M \neq A$ — точка, в которой биссектриса угла при вершине A треугольника ABC пересекает описанную окружность этого треугольника. Тогда отрезки MI, MB, MC, а также MI_A равны друг другу по длине.

7. Восстановите треугольник по точкам A, I, O.

8. Восстановите треугольник по точкам I_B, I_C, O.

Задачи для самостоятельного решения

9. Углы ортотреугольника равны φ, ψ, ω. Каковы углы треугольника?

10. В треугольнике ABC точки A, B, I, H лежат на одной окружности. Найдите угол при вершине C.

11. **Окружность девяти точек.** Основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности. Центр этой окружности — середина отрезка OH.

12. Восстановите треугольник по точкам, симметричным ортоцентру относительно сторон треугольника.

13. Три равные окружности пересекаются в точке H. A, B, C – их вторые точки пересечения. Докажите, что H — ортоцентр $\triangle ABC$.

14. Восстановите треугольник по точкам I, I_A, O.

15.* В треугольнике ABC точка I — инцентр, точка D — середина стороны BC, точка E – середина дуги BC, содержащей точку A. Докажите, что $\angle IEA = \angle IDB$ (в предположении, что $AB < AC$).

0. Пусть M – середина AH, D – середина BC. Докажите, что $DM \perp B'C'$, где B' и C' – основания соответствующих высот.

Ортотреугольник

Там, где это не оговорено, будем считать, что дан треугольник ABC, его ортоцентр H, центр вписанной окружности I, центр описанной окружности O, а углы $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$.

1. Углы треугольника равны α, β, γ. Каковы углы ортотреугольника?

2. Восстановите треугольник по центрам вневписанных окружностей.

3. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно **(а)** сторон, **(б)** середин сторон, лежат на описанной окружности.

4. Восстановите треугольник по точкам, симметричным ортоцентру относительно середин сторон треугольника.

5. Три равные окружности пересекаются в точке H. A, B, C — их вторые точки пересечения. Докажите, что окружность, описанная около $\triangle ABC$, равна исходным.

6. Лемма о куриной лапке. Пусть $M \neq A$ — точка, в которой биссектриса угла при вершине A треугольника ABC пересекает описанную окружность этого треугольника. Тогда отрезки MI, MB, MC, а также MI_A равны друг другу по длине.

7. Восстановите треугольник по точкам A, I, O.

8. Восстановите треугольник по точкам I_B, I_C, O.

Задачи для самостоятельного решения

9. Углы ортотреугольника равны φ, ψ, ω. Каковы углы треугольника?

10. В треугольнике ABC точки A, B, I, H лежат на одной окружности. Найдите угол при вершине C.

11. Окружность девяти точек. Основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности. Центр этой окружности — середина отрезка OH.

12. Восстановите треугольник по точкам, симметричным ортоцентру относительно сторон треугольника.

13. Три равные окружности пересекаются в точке H. A, B, C – их вторые точки пересечения. Докажите, что H — ортоцентр $\triangle ABC$.

14. Восстановите треугольник по точкам I, I_A, O.

15.* В треугольнике ABC точка I — инцентр, точка D — середина стороны BC, точка E – середина дуги BC, содержащей точку A. Докажите, что $\angle IEA = \angle IDB$ (в предположении, что $AB < AC$).