**0.** $a,b,c,d$ — попарно различные числа. Решите уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-a)(x-d)}{(b-c)(b-a)(b-d)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1\ .$$

# Многочлены, числа, функции и уравнения

**1.** Найдите все $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, такие что $xP(x-1)=(x-2)P(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

**2.** Разложите на множители многочлен $x^4+1$.

**3.** Решите в комплексных числах уравнение $z^2-(3+2i)z+6i=0$.

**4.** Многочлен степени $n$ имеет $n$ различных действительных корней. Какое наибольшее количество его коэффициентов может быть равно нулю?

**5.** Существует ли функция $f$, определенная при всех $\in\mathbb{R}$ и для всех $x,y\in\mathbb{R}$ удовлетворяющая неравенству $|f(x+y)+\sin x+\sin y|<2$?

**6.** Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такие что $f(x)+xf(1-x)=1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

**7.** Найдите все $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие $f(x)\cdot f(y)=f(x-y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**8.** Найдите все многочлены $R(x)$, такие что $xR(x-5)=(x-4)R(x)$.

**9.** Разложите на множители многочлен $x^{10}+x^5+1$.

**10.** Решите в комплексных числах уравнение $z^2+z+1=0$.

**11.** Может ли многочлен $1+x/1!+x^2/2!+\cdots+x^n/n!$ иметь кратные корни?

**12.** Даны $a,b,A,B\in\mathbb{R}$ и

$$f(x)=1-a\sin x-b\cos x-A\sin 2x-B\cos 2x.$$

Известно, что $f(x)\geqslant 0 \ \forall x$. Докажите, что $a^2+b^2\leqslant 2,\ A^2+B^2\leqslant 1$.

**13.** Найдите все функции, такие что $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x \quad \forall x$.

**14.** Найдите все функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, удовлетворяющие условиям

**(i)** $f(1)=2$ **(ii)** $\forall x,y\in\mathbb{R} \quad f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$.

---

**15.*** Для заданных натуральных чисел $k_0<k_1<k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0,2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin k_0x+A_1\sin k_1x+A_2\sin k_2x=0\ ,$$

где $A_1,A_2\in\mathbb{R}$.

**0.** $a, b, c, d$ — попарно различные числа. Решите уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-a)(x-d)}{(b-c)(b-a)(b-d)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1\ .$$

# Многочлены, числа, функции и уравнения

**1.** Найдите все $P(x)\in\mathbb{R}[x]$, такие что $xP(x-1)=(x-2)P(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

**2.** Разложите на множители многочлен $x^4+1$.

**3.** Решите в комплексных числах уравнение $z^2-(3+2i)z+6i=0$.

**4.** Многочлен степени $n$ имеет $n$ различных действительных корней. Какое наибольшее количество его коэффициентов может быть равно нулю?

**5.** Существует ли функция $f$, определенная при всех $\in\mathbb{R}$ и для всех $x, y\in\mathbb{R}$ удовлетворяющая неравенству $|f(x+y)+\sin x+\sin y|<2$?

**6.** Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такие что $f(x)+xf(1-x)=1+x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

**7.** Найдите все $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие $f(x)\cdot f(y)=f(x-y) \quad \forall x, y\in\mathbb{R}$.

## Задачи для самостоятельного решения

**8.** Найдите все многочлены $R(x)$, такие что $xR(x-5)=(x-4)R(x)$.

**9.** Разложите на множители многочлен $x^{10}+x^5+1$.

**10.** Решите в комплексных числах уравнение $z^2+z+1=0$.

**11.** Может ли многочлен $1+x/1!+x^2/2!+\cdots+x^n/n!$ иметь кратные корни?

**12.** Даны $a, b, A, B\in\mathbb{R}$ и

$$f(x)=1-a\sin x-b\cos x-A\sin 2x-B\cos 2x.$$

Известно, что $f(x)\geqslant 0 \ \forall x$. Докажите, что $a^2+b^2\leqslant 2,\ A^2+B^2\leqslant 1$.

**13.** Найдите все функции, такие что $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x \quad \forall x$.

**14.** Найдите все функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, удовлетворяющие условиям

**(i)** $f(1)=2$ **(ii)** $\forall x, y\in\mathbb{R} \quad f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$.

---

**15.*** Для заданных натуральных чисел $k_0<k_1<k_2$ выясните, какое наименьшее число корней на промежутке $[0, 2\pi)$ может иметь уравнение вида

$$\sin k_0x+A_1\sin k_1x+A_2\sin k_2x=0\ ,$$

где $A_1, A_2\in\mathbb{R}$.