# Олимпиада по математике ЛОШ-2015

## Условия и решения задачи в младшей лиге (8-9 класс)

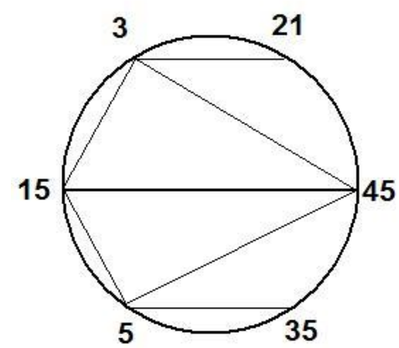
**1.** Найдите хотя бы одно решение числового ребуса $\text{AX}^2 = \text{OOX}$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным —разные.

1 **SOLUTION.** Число AX заканчивается на ту же цифру, что и его квадрат. Это означает, что оно оканчивается на 0, 1, 5 или 6. Квадрат числа AX — число трехзначное. Это значит, что AX меньше 40, то есть первая цифра 1, 2 или 3. Всего вариантов $4 \times 3 = 12$. Перебором находим решения $15^2 = 225$ и $21^2 = 441$.

**2.** Все нечётные числа от 3 до 49 расставлены по окружности. Два числа соединены хордой тогда и только тогда, когда одно из них делит другое. Докажите, что найдутся две хорды, пересекающиеся внутри окружности.

2 **SOLUTION.**

Предположим обратное: никакие две хорды не пересекаются. Рассмотрим числа 15 и 45, они соединены хордой, которая разбивает окружность на две части. Числа 3 и 5 соединены с каждым из них, поэтому они по разные стороны от хорды 15-45. Число 21 должно быть по ту же сторону от хорды 15-45, что и число 3; число 35 должно быть по ту же сторону от хорды 15-45, что и число 5. Тогда либо хорда 7-21, либо хорда 7-35 пересекает хорду 15-45.




**3.** Существует ли треугольник с вершинами в узлах сетки клетчатой бумаги, у которого точка пересечения высот, точка пересечения медиан, центр описанной окружности и центр вписанной окружности также лежат в узлах сетки?

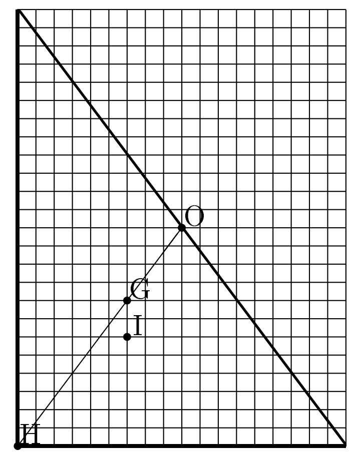
3 **SOLUTION.** Да, существует.

Введем систему координат $Oxy$ вдоль линий сетки. Возьмем треугольник с вершинами в точках $A(0,0), B(18,0), C(0,24)$.

**(i)** У него центр вписанной окружности имеет координаты $(6,6)$ (радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно посчитать по формуле $\dfrac{a+b-c}{2}$, где $a, b$ — катеты, $c$ — гипотенуза).

**(ii)** Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит в середине гипотенузы $BC$ — точке $A_1$: $\left({}^{18}\!/_{2}, {}^{24}\!/_{2}\right) = (9, 12)$. Точка пересечения медиан делит медиану $AA_1$ в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому ее координаты равны $(6, 8)$ ($\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$).

**(iii)** Осталось только заметить, что точка пересечения высот (ортоцентр) в прямоугольном треугольнике совпадает с вершиной прямого угла.




**4.** В компании из 20 человек для любых троих найдётся человек, который знаком с ними. Докажите, что найдётся человек, имеющий не менее девяти знакомых.

4 **SOLUTION.** Всего троек людей в этой компании — $C_{20}^3 = 20 \cdot 57$. Поэтому кто-то из 20 людей должен знать не менее 57 троек. Но если человек имеет менее 9 знакомств, то он знает не более $C_8^3 = 56$ троек.

**5.** Докажите неравенство $25(ab + cd)^2 \geqslant 16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$, если $a, b, c, d$ — действительные числа, каждое из которых не меньше 1 и не больше 2.

5 **SOLUTION.**

**Первое решение.** Заметим, что справедливо «тождество двух квадратов» $(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = (ab + cd)^2 + (ac - bd)^2$.

Подставляя это в наше неравенство, получим $9(ab+cd)^2 \geqslant 16(ac-bd)^2$. Можем считать, что $ac \geqslant bd$ (иначе переобозначим). Тогда достаточно доказать, что

$$4bd + 3ab + 3cd \geqslant 4ac.$$

Поделив на $ac$, получим

$$4\frac{b}{c}\frac{d}{a} + 3\frac{b}{c} + 3\frac{d}{a} \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Оценки дробей, входящих в последнее неравенство, прямо следуют из условия.

**Второе решение.** Рассмотрим два вектора: $\overline{x} = (a, d)$ и $\overline{y} = (b, c)$. Заметим, что $ab + cd$ — скалярное произведение этих векторов, $a^2 + d^2 = \overline{x}^2$, $b^2 + c^2 = \overline{y}^2$. Нужно доказать, что $25(\overline{x}, \overline{y})^2 \geq 16\overline{x}^2\overline{y}^2$.

Поскольку $(\overline{x}, \overline{y}) = |\overline{x}||\overline{y}| \cos\varphi$, неравенство равносильно такому: $\cos^2\varphi \geq {}^{16}\!/_{25}$, то есть $|\cos\varphi| \geq {}^{4}\!/_{5}$.

Изобразим на плоскости множество точек, в которых могут находиться концы наших векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$: это квадрат с вершинами $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$. Заметим, что $\cos\varphi$ убывает на $[0, \pi]$, поэтому он минимален при $\overline{x} = (2, 1)$ и $\overline{y} = (1, 2)$ и равен в этом случае ${}^{4}\!/_{5}$.

**Третье решение** (обращение неравенства Коши-Буняковского-Шварца).

Пусть $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, $b_1$, $b_2$, ..., $b_n \in [m, M]$, где $m > 0$. Тогда

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \leqslant \left(\frac{m^2 + M^2}{2mM}\right)^2 (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2.$$

Доказательство. Заметим, что если $a$, $b \in [m, M]$, то $a^2 + b^2 \leqslant \left(\frac{M}{m} + \frac{m}{M}\right) ab$, так как $f(t) = t + \frac{1}{t}$ выпукла на отрезке $\left[{}^m\!/_M, {}^M\!/_m\right]$, а величина ${}^a\!/_b$ изменяется как раз в таких пределах.

Получаем, что

$$2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)} \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m^2 + M^2}{mM}(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

Осталось возвести неравенство в квадрат и подставить $n = 2$ и $m = 1, M = 2$.

**6.** Даны 2015 равных отрезков. В любой момент любой из имеющихся отрезков можно разрезать на два равных. При каком наибольшем $n$ можно гарантировать, что в каждый момент найдется $n$ равных отрезков?

6 **SOLUTION.** *Ответ:* при $n = 1008$.

*Оценка.* Если в некоторый момент не нашлось 1008 равных отрезков, то суммарная длина всех отрезков не больше $1007l\left(1 + {}^1\!/_2 + {}^1\!/_4 + {}^1\!/_8 + \ldots\right)$, что меньше исходной суммарной длины $2015l$. Поэтому 1008 равных отрезков всегда найдутся.

*Пример.* Отложим 1008 отрезков, а остальные разрежем на 2014 половинок. Потом отложим 1008 половинок, а остальные разрежем на 2012 четвертинок. После этого отложим 1008 четвертинок, а остальные разрежем и т.д. Количество неотложенных отрезков уменьшается, поэтому когда-то и их станет не больше 1008. Значит, 1009 равных отрезков может и не найтись.

## Условия и решения задачи в старшей лиге (10-11 класс)

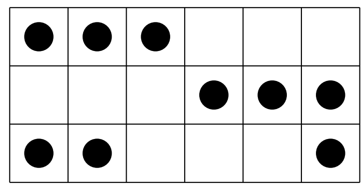
**1.** Известно, что $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Найдите $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x$.

1 **SOLUTION.** *Ответ:* 47. Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда по условию $t + {}^1\!/_t = 3$. Возведем это равенство в квадрат: $t^2+2+{}^1\!/_{t^2} = 9$, откуда $t^2+{}^1\!/_{t^2} = 7$. Полученное равенство снова возведем в квадрат: $t^4 + 2 + {}^1\!/_{t^4} = 49$, откуда $t^4 + {}^1\!/_{t^4} = 47$.

**2.** Двое по очереди расставляют попарно различные числа в клетки квадрата $6\times6$. По окончанию расстановки в каждой строке закрашивают наибольшее число. Первый выигрывает, если можно пройти по закрашенным клеткам от верхней строки к нижней (переходить по клеткам можно, если они имеют общую точку). Может ли второй помешать первому выиграть?

2 **SOLUTION.** *Ответ:* второй может помешать.

Второй игрок разобьет клеточки в каждой строке на пары и будет делать ходы в те же пары, что и первый. При этом второй может выбрать, в какой из клеточек пары число будет больше. Таким образом, второй игрок может добиться, чтобы наибольшие числа в первых трёх строках стояли в помеченных клетках рисунка. На нём видно, что из первой строки в третью не пройти при такой стратегии второго игрока.



**3.** Игорь нашёл сумму всех нечётных натуральных делителей некоторого чётного натурального числа, а Вова — всех чётных. Может ли произведение их результатов быть квадратом целого числа?

3 **SOLUTION.** *Ответ:* не может.

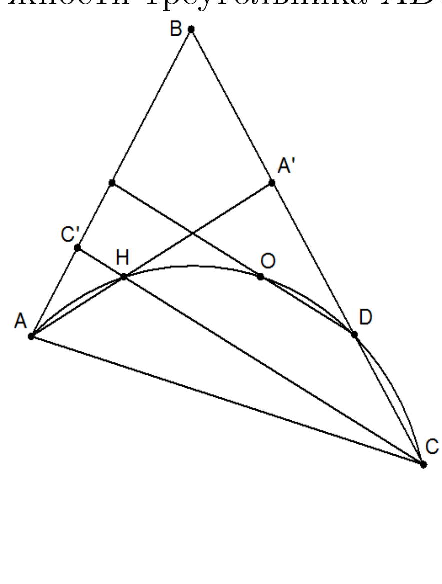
Пусть $n \cdot 2^k$ — исходное чётное число, а $S$ — сумма делителей нечётного числа $n$. Тогда Игорь получит число $S$, а Вова — $2S+4S+\ldots+2^kS$. Произведение этих чисел равно $2S^2t$, где $t$ нечётно. Это произведение не является квадратом, поскольку двойка входит в его разложение в нечётной степени.

**Замечание.** Чётность исходного числа существенна.

**4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ угол $B$ равен $60°$. Докажите, что расстояние между центром описанной окружности и точкой пересечения высот равно $|AB - BC|$.

4 **SOLUTION.** Пусть $O$ — центр описанной окружности, $H$ — точка пересечения высот (ортоцентр), $R$ — радиус описанной окружности треугольника $ABC$.

**Первое решение.** Если $AB = BC$, то утверждение очевидно. Иначе можем считать, что $AB < BC$. Отложим на $BC$ отрезок $BD = AB$. Тогда нужно доказать, что $CD = OH$. Заметим, что $\angle AOC = 2\angle B = 120°$; $\angle AHC = 120°$ из четырехугольника $C'BA'H$; $\angle ADC = 120°$, поскольку треугольник $ABD$ равносторонний. Значит, точки $A, H, O, D, C$ лежат на одной окружности. Точки $D$ и $O$ лежат на серединном перпендикуляре к $AB$. Поэтому $DO$ и высота $CC'$ параллельны, следовательно, высекают на этой окружности равные хорды $CD$ и $OH$.




**Второе решение.** Воспользуемся теоремой Гамильтона (оставляем в качестве упражнения): $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Умножим скалярно вектор $\overrightarrow{OH}$ на себя:

$$OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$$

Заметим, что угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ в два раза больше угла $C$, обозначим его $2\gamma$, аналогично, угол между $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ в два раза больше угла $A$, обозначим его $2\alpha$. Угол между $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OA}$ равен $120^\circ$.

Тогда получаем, что

$$OH^2 = 3R^2 + 2R^2\cos 2\gamma + 2R^2\cos 2\alpha + 2R^2\cos 120^\circ =$$

$$= 2R^2 + 2R^2(1 - 2\sin^2\gamma) + 2R^2(1 - 2\sin^2\alpha) = 6R^2 - 4R^2\sin^2\gamma - 4R^2\sin^2\alpha.$$

Воспользуемся теоремой синусов: $\dfrac{AB}{\sin\gamma} = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{CA}{\sin 60^\circ} = 2R.$

Отсюда $OH^2 = 6R^2 - AB^2 - BC^2 = 2CA^2 - AB^2 - BC^2$.

Применение теоремы косинусов $CA^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$ приводит к равенству $OH^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC = (AB - BC)^2$, откуда $OH = |AB - BC|$, что и требовалось доказать.

**Замечание.** Утверждение задачи верно и для неостроугольного треугольника.

**5.** При раскраске ребер полного графа на $n$ вершинах было использовано не менее $n$ цветов. Докажите, что в нем найдётся разноцветный треугольник.

5 **SOLUTION.**

**Первое решение** (индукцией по количеству вершин $n$)**.**

При $n = 1$ и $n = 2$ утверждение выполнено автоматически.

База ($n = 3$) очевидна.

Шаг ($n \to n + 1$).

Выкинем какую-нибудь вершину, получится граф $G$ на $n$ вершинах.

Если в $G$ присутствуют $n$ цветов, то в нём по предположению индукции есть разноцветный треугольник.

Иначе в $G$ не более $n - 1$ цветов. Значит, ребра двух каких-то цветов выходили исключительно из выброшенной вершины. Рассмотрим эту вершину и ребра этих двух цветов, их концы соединены третьим цветом.

**Второе решение.** Оставив по одному ребру каждого цвета, получим граф, в котором ребер не меньше, чем вершин. Хорошо известно, что в таком графе есть цикл. Значит, в исходном графе есть разноцветный цикл. Возьмем любую его хорду. В одной из частей цикла, высекаемых хордой, нет ребер цвета этой хорды. Эта часть вместе с хордой образуют разноцветный цикл меньшей длины. Действуя так и далее, получим разноцветный треугольник.

**6.** Даны 29 дробей. Каждое из чисел 2, 3, ..., 30 является числителем ровно одной из этих дробей и знаменателем ровно одной из этих дробей. Докажите, что можно выбрать несколько — не менее одной и не более 10 — из этих дробей так, что их произведение будет целым числом.

6 **SOLUTION.** Выберем первую дробь с простым знаменателем, а каждую следующую — со знаменателем, равным любому простому делителю числителя текущей дроби. Найдется шаг, на котором числитель очередной $n$-й дроби будет

делиться на уже встречавшийся знаменатель $k$-й дроби ($n$ может равняться $k$). Тогда произведение выбранных дробей с $k$-й по $n$-ю будет целым. Поскольку простых чисел, не превосходящих 30, всего 10, мы перемножили не более 10 дробей.