Комбинаторика

Часть первая. Введение

Что такое *комбинаторика*? Комбинаторикой (или комбинаторным анализом) называется раздел математики, который решает задачи подсчета количества объектов, удовлетворяющих какому-либо свойству. Поэтому большинство задач, которые мы будем решать, будут содержать схожие вопросы — "Сколько различных вариантов *того-то*... ?", "Сколькими способами можно сделать *то-то*... ?", "Сколько существует *таких-то* объектов... ?" и т.д. и т.п.

В этой вводной части мы познакомимся с основными правилами комбинаторики, которые, несмотря на свою простоту, позволяют решить на первый взгляд не очень простые задачи.

Для начала рассмотрим несколько простых иллюстративных задач.

Задача 1. К девочке в гости пришел мальчик, и девочка решила его чем-нибудь угостить. У себя в буфете она нашла семь печений и пять пирожных. Сколькими различными способами девочка может мальчика угостить, если она хочет дать ему лишь одно пирожное и одно печенье?

Задача 2. Девочка еще порылась в буфете и обнаружила кроме семи печений и пяти пирожных еще и десять конфет. Сколько теперь есть у нее способов составить угощение для мальчика, если она хочет дать ему одну конфету, одно печенье и одно пирожное?

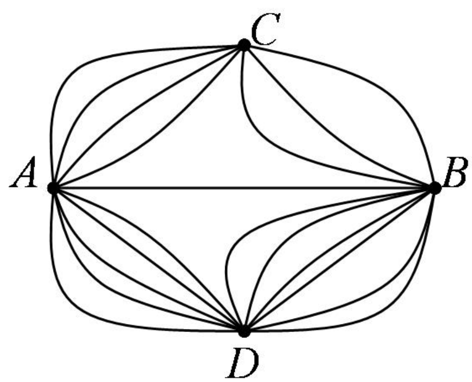
Задача 3. Девочка отыскав в буфете семь печений, пять пирожных и десять конфет, решила дать мальчику только две какие-нибудь сладости (печенье с пирожным, пирожное с конфетой или конфету с печеньем). Сколько различных вариантов угощения может она составить?

Задача 4. Сколькими способами можно выбрать одну гласную и одну согласную буквы из слова "ШКОЛА"?

Задача 5. На почте продаются восемь видов конвертов, 25 различных открыток и 30 видов марок. Сколькими способами можно купить конверт с открыткой и марку?

Задача 6. Из города A в город B ведет одна дорога, в город C – четыре, в D — пять, из города C в город B — три дороги, а из D в B — шесть (см. рис. 1). Сколько существует способов доехать из города A в город B, если считать, что по дорогам можно ехать лишь в одном направлении — слева направо?

Рис. 1:



При решении этих задач самое главное — не запутаться, когда нам нужно перемножать количества вариантов, а когда складывать. Чтобы лучше себе это уяснить, сформулируем два основных комбинаторных правила.

Правило произведения. *Пусть объект A можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами. Тогда выбор пары (A, B) можно осуществить nm способами.*

Например, в первом примере было два "объекта" — печение и пирожное.

Правило суммы. *Пусть некоторый объект A можно выбрать n различными способами, а другой объект B можно выбрать m способами. Тогда существует $n+m$ способов выбрать либо объект A, либо объект B.*

В третьем примере такими "объектами" являются пары — (печенье и пирожное), (пирожное и конфета) и (конфета и печенье).

Задача 7. Монетку бросают десять раз. Сколько различных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

Задача 8. Сколько существует семизначных чисел, все цифры которых нечетны?

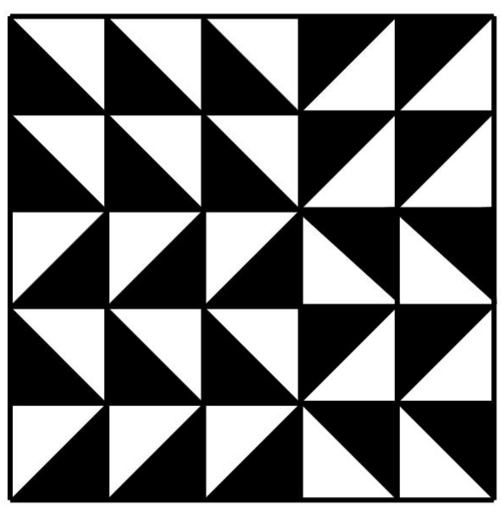
Задача 9. Дана квадратная таблица 3×3, каждую клетку которой можно окрасить в один из трех цветов. Сколько различных раскрасок таблицы можно получить?

Задача 10. Сколькими способами можно прочитать слово "ПОТЕНЦИАЛ", двигаясь вправо или вниз?

П	О	Т	Е	Н	Ц	И	А	Л
О	Т	Е	Н	Ц	И	А	Л	
Т	Е	Н	Ц	И	А	Л		
Е	Н	Ц	И	А	Л			
Н	Ц	И	А	Л				
Ц	И	А	Л					
И	А	Л						
А	Л							
Л								

Задача 11. Квадрат 5×5 разбит на единичные клеточки. Его покрывают 25 черных и 25 белых прямоугольных равнобедренных треугольников, так что каждую клетку закрывают два треугольника. "Шахматным" будем называть такие покрытия, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует различных "шахматных" покрытий? (Одно из возможных "шахматных" покрытий изображено на рис. 2)

Рис. 2:



При решении этих задач получается ответ вида n^m, где n и m — некоторые натуральные числа. Такой ответ получается во всех задачах,в которых требуется посчитать количество способов на каждое из m *мест* поставить один из n различных *объектов*. В таких задачах главное не перепутать что в какую степень следует возводить!

Например, в четвертом примере "местом" является номер броска, а "объектом" — сторона монеты — орел или решка.

Заметим при этом, что в таких задачах вполне допустимо (и даже приветствуется) оставлять ответ в "степенном виде" — n^m, не доводя его до окончательной десятичной записи. Более того, так он выглядит более естественно — сразу становится ясно каким образом он получен.

Задача 12. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать старосту класса и его помощника?

Задача 13. Сколько существует способов выбрать четыре карты из колоды (36 карт) так, чтобы они все были различных мастей и достоинств?

Задача 14. В русском алфавите 33 буквы. Сколько различных пятибуквенных "слов" можно составить, если не допускать "слов", где две одинаковые буквы идут подряд?

"Слово" не обязательно должно быть осмысленным. Например, *абвгд* или *ъвыйы* "словами" являются, а вот *класс*, *ссора* и *пресс* таковыми не являются, так как в них есть две одинаковые подряд идущие буквы.

Задача 15. Сколько существует различных вариантов раскраски граней кубика в данные шесть цветов, если считать раскраски, отличающиеся лишь поворотом кубика за один и тот же вариант?

Задача 16. Сколько существует десятизначных чисел с нечетной суммой цифр?

Отметим, что при решении этих задач надо не забывать, что выбор первого объекта может сузить множество вариантов для выбора следующего объекта. Так, например, в четвертом примере выбор старосты ограничивает число людей, претендующих на роль помощника, до 24 человек, то есть выборы старосты и помощника не являются независимыми, в отличии от первых разобранных примеров, где выбор пирожного никак не влиял на последующий выбор печенья.

Рассмотрим еще несколько задач на ту же идею, объединенных общей тематикой — это так называемые *задачи на шахматных досках*. Заметим, что для решения этих задач про шахматы по сути ничего знать не надо, кроме того, как ходят фигуры.

Задача 17. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Задача 18. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого слона так, чтобы они не били друг друга?

Задача 19. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого ферзя так, чтобы они не били друг друга?

Задача 20. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого короля так, чтобы полученная ситуация не противоречила правилам игры в шахматы (ведь, как известно, королей бить нельзя)?

Задача 21. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску черного и белого коня так, чтобы они не били друг друга?

Часть вторая. Перестановки

Рассмотрим простой пример.

Задача 22. Девочке мама на завтрак дала конфету, пряник и булочку. Сколько различных порядков поедания этих сладостей есть у девочки?

Ну, хорошо, когда у нас есть всего три предмета, то можно просто перечислить все их перестановки. Но если бы предметов было больше — пять, десять или даже сто, то выписать все перестановки просто не представляется возможным.

Давайте попробуем найти общую формулу для числа перестановок из n различных элементов.

Если у нас лишь два элемента, то они могут быть расположены всего двумя способами:

$$12 \quad 21$$

Для трех элементов существует шесть различных способов выписать их в строчку:

$$\begin{matrix} 123 & 213 & 312 \\ 132 & 231 & 321 \end{matrix}$$

Для четырех элементов аналогично получаем 24 варианта перестановки:

$$\begin{matrix} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1243 & 2143 & 3142 & 4132 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \\ 1342 & 2341 & 3241 & 4231 \\ 1423 & 2413 & 3412 & 4312 \\ 1432 & 2431 & 3421 & 4321 \end{matrix}$$

Здесь в каждом столбце перестановки начинаются с одного и того же элемента, после которого идут всевозможные перестановки из трех оставшихся элементов (которых, как мы убедились ранее, шесть штук).

Если мы теперь запишем все перестановки из пяти элементов, то это будет табличка из пяти столбцов, по 24 строчки в каждом, то есть всего $5 \cdot 24 = 120$ перестановок.

Сколько же всего существует перестановок из n различных элементов? Давайте считать: на первое место можно поставить любой из n элементов, на второе место — лишь $(n-1)$ элемент (любой, кроме того, который уже стоит на первом месте), на третье — $(n-2)$, $\ldots$, на предпоследнее — один из двух оставшихся, и на последнее место можно поставить только последний элемент. В итоге

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

способов переставить n элементов. Однако это выражение для числа перестановок выглядит очень громоздко, поэтому для числа перестановок из n элементов было введено обозначие: $n!$ (читается "эн–факториал"). Факториал числа n — это произведение всех натуральных чисел не превосходящих n:

$$1! = 1,$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$

и т.д.

Так как при решении комбинаторных задач факториалы появляются очень часто, то принято считать, что вполне достаточно оставлять их в ответе, не доводя до окончательного числа.

Основное свойство факториала сразу вытекает из определения

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Это равенство справедливо для любого натурального n. Однако в ряде случаев для единообразия записи ответа бывает полезно считать, что оно выполнено и для $n = 0$, то есть

$$1! = 1 \cdot 0!$$

Откуда получаем, что $0! = 1$. На это следует смотреть лишь как на соглашение, не более того.

Перейдем наконец к задачам.

Задача 23. На танцплощадке собрались 20 парней и 20 девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

Задача 24. Сколько существует способов расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Задача 25. Чему равна сумма всех пятизначных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Задача 26. Десять девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Задача 27. Сколько всего десятизначных чисел, в которых хотя бы две какие-то цифры одинаковы?

Задача 28. Сколько существует различных возможностей рассадить 10 мальчиков и 10 девочек за круглый стол с двадцатью креслами так, чтобы они чередовались?

Задача 29. Сколькими способами 20 учеников могут выстроиться в очередь в столовую, если Лена хочет стоять рядом с подругой Катей?

Рассмотрим теперь цикл задач про перестановки букв в словах. При этом в этих задачах под *словом* понимается любая последовательность букв.

Задача 30. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в слове “ПОТЕНЦИАЛ”?

Задача 31. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в слове “АЛГЕБРА”?

Задача 32. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в слове “ПАРАБОЛА”?

Задача 33. Сколько различных слов можно получить перестановкой букв в словах
а) “ВЫСОТА”,
б) “МЕДИАНА”,
в) “ГЕОМЕТРИЯ”,
г) “МАТЕМАТИКА”,
д) “БИССЕКТРИСА”,
е) “КОМБИНАТОРИКА”?

Задача 34. Мама купила для дочки один апельсин, две груши, три мандарина и четыре яблока. В течение ближайших десяти дней мама будет давать на завтрак девочке один из имеющихся фруктов. Сколькими различными способами она может это сделать?

Задача 35. Сколько существует способов расставить на первой горизонтали шахматной доски короля, ферзя, двух слонов, двух коней и двух ладей?