Многоборье-2014 (с решениями)

Регата

Младшая лига

Первый тур

1. Даны 4 натуральных числа. В каждой тройке их сумма делится на среднее из них по величине. Докажите, что среди чисел есть равные.

☐ *Ответ:* нет.

Допустим, числа различны: $a < b < c < d$. Тогда $c \mid (a + c + d)$, $c \mid (b + c + d)$, поэтому $c \mid (b - a) = (b + c + d) - (a + c + d)$. Но $c > b - a > 0$.

(А. Шаповалов)

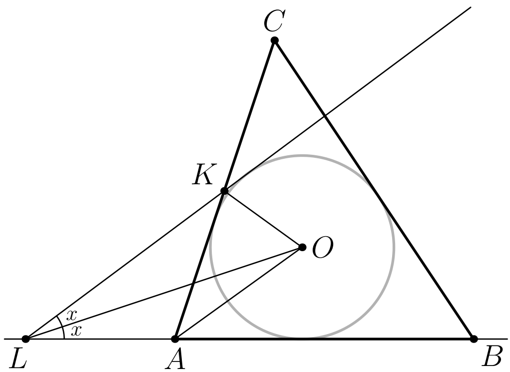

Рис. 1: к задаче 2

2. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Точка L лежит на продолжении стороны AB за вершину A. Проведенная из L касательная к окружности пересекает сторону AC в точке K. Найдите $\angle KOL$, если $\angle BAC = 50°$.

☐ *Ответ:* $65°$.

Рис. 1. Пусть $\angle KLO = x$. Тогда $\angle KLA = 2x$ и $\angle LKA = 50° - 2x$. KO является биссектрисой угла, смежного с $\angle LKA$, а значит $\angle AKO = 90° - (50° - 2x)/2 = 65° + x$. Тогда $\angle KOL = 180° - x - (50° - 2x) - (65° + x) = 65°$.

(перелицовка задачи Соросовской олимпиады 1995)

3. За круглым столом сидели несколько лжецов и рыцарей. Первый сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на одного больше, чем рыцарей.». Второй сказал: «Не считая меня, здесь лжецов на два больше, чем рыцарей.», и так далее вплоть до последнего. Сколько человек могло сидеть за столом?

☐ *Ответ:* 2 или 3.

Пусть всего n человек. Все лжецами быть не могут, иначе $(n-1)$-й сказал правду. Все заявления противоречат друг другу, поэтому рыцарь ровно 1. Он сидит на $(n-1)$-м месте. Для лжеца верным будет утверждение: «Не считая меня, здесь лжецов на $(n-3)$ больше, чем рыцарей.». Чтобы оно не прозвучало, должно быть $n-3<1$, то есть $n<4$.

(А. Шаповалов)

Второй тур

4. Числа a, b, c различны, а прямые $y=a^2x+bc$, $y=b^2x+ac$ и $y=c^2x+ab$ проходят через одну точку. Докажите, что $a+b+c=0$.

☐ Попарные пересечения прямых имеют абсциссы $\frac{c}{a+b}$ и $\frac{b}{a+c}$. Вычтя эти дроби и сократив числитель на $b-c$, получим требуемое.

(А. Шаповалов)

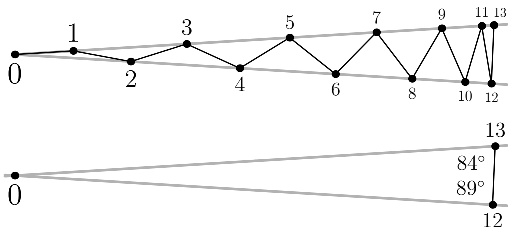

Рис. 2: к задаче 5

5. Из точки A_0 под углом в $7°$ проведены черный и красный лучи, после чего построена ломаная $A_0A_1\ldots A_{20}$ (возможно, самопересекающаяся, но все вершины различны), у которой все звенья имеют длину 1, все четные вершины лежат на черном луче, а нечетные — на красном. Вершина с каким номером наиболее удалена от вершины A_0?

☐ *Ответ:* A_{13}.

Рис. 2. Заметим, что если $180° - \angle A_iA_{i-1}A_0 < 90°$, то A_{i+1} находится дальше от A_0, чем A_{i-1}, при этом треугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ равнобедренный и

$$180° - \angle A_{i+1}A_iA_0 = \angle A_iA_{i+1}A_0 + 7° = (180° - \angle A_iA_{i-1}A_0) + 7°.$$

Следовательно, величина $180° - \angle A_iA_{i-1}A_0$ за одну итерацию увеличивается на $7°$ (а при $i=2$ она равна $14°$.) Увеличиваться она может до тех пор, пока не станет больше 90° — после этого точки начнут приближаться к A_0. Это произойдет при $i = 13$ ($7^\circ \cdot 13 = 91^\circ$). Осталось заметить, что $A_0A_{12} < A_0A_{13}$. Действительно, это равносильно тому, что $84^\circ = \angle A_0A_{13}A_{12} < \angle A_0A_{12}A_{13} = 89^\circ$.

(старый конкурс Кенгуру)

6. 5 аборигенов хотят переправиться в двухместной лодке через реку Лимпопо. Изначально каждый о ком-нибудь из остальных слышал слух, что тот — вирусоноситель лихорадки Эболы, и о каждом кто-то из остальных такое слышал. С тем, о ком он такое слышал, абориген вместе в лодку не сядет. На берегах аборигены не разговаривают, зато в лодке обмениваются всеми известными им слухами. Может ли случиться, что все они таки смогут переправиться?

☐ *Ответ:* может.

Пусть A слышал о B, B — о C, C — о A; D — о E, E — о D. График переходов:

$ABCDE$	
BCE	AD
$BCDE$	A
BE	ACD
BDE	AC
D	$ABCE$
CD	ABE
	$ABCDE$

(А. Шаповалов)

Третий тур

7. На столе стоит 17 стаканов компота, наполненных в разной степени. Общий объем сухофруктов составляет 10% от всего компота. Петя и Вася выбирают и выпивают стаканы по очереди (начинает Петя), пока не выпьют всё. Докажите, что Петя всегда может добиться, чтобы в выпитом им компоте доля сухофруктов отличалась от 10% не больше, чем доля сухофруктов у Васи.

☐ Пусть Петя каждым ходом выпивает стакан, где больше всего компота. Вася каждым ответным ходом будет выпивать не больше компота. Кроме того, Петя выпьет лишний стакан, поэтому в сумме выпьет больше Васи. В результате Петя выпьет объем A, а Вася — объем B, где $A > B$. Общий объем сухофруктов равен $0.1(A+B) = 0.1A+0.1B$. Пусть объем сухофруктов у Пети равен $0.1A+x$ (где x может быть и отрицательным). Тогда объем сухофруктов у Васи равен $0.1B-x$. Доля сухофруктов у Пети равна $(0.1A+x)/A = 0.1+x/A$. Она отличается от 10% на $|x|/A$. Аналогично, отличие доли Васи от 10% равно $|x|/B$. Это не меньше чем у Пети, так как $A > B$.

(А. Шаповалов)

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны и пересекают диагональ BD в двух различных точках P и Q, при этом $BP = DQ$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

□ Пусть AP и CQ — отрезки биссектрис, и $AP > CQ$. Продлим отрезок QC за точку C так, чтобы полученный отрезок QE был равен AP (рис. 3). Тогда треугольники APD и QBE равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle PAD = \angle BEQ$, $AD = BE$ и аналогично $\angle PAB = \angle DEQ$, $AB = DE$. Значит, $BADE$ параллелограмм. Если точки C и E не совпадают, то треугольники BEC и CED равны по стороне и двум углам. Тогда треугольник BCD равнобедренный и Q — середина стороны BD. Но тогда точка P должна совпадать с точкой Q, что противоречит условию.

(А. Шаповалов)

9. Несколько ладей побили все белые клетки шахматной доски 40×40. Какое наибольшее число черных клеток могли остаться не побитыми? (Ладья бьет клетку, на которой стоит.)

□ *Ответ:* 400.

Оценка. Если есть не побитая клетка, то на проходящих через неё рядах (вертикали и горизонтали) нет ладей. Чтобы побить все клетки одного цвета на таком ряду, надо поставить ладьи как минимум на 20 перпендикулярных рядах. Таким образом, свободны от ладей не более чем 20 рядов по каждому из направлений. Непобитые клетки стоят на пересечении таких рядов, поэтому их не более 20^2.

Пример. Можно считать, что левая нижняя клетка — черная. Расставим по 20 ладей на белых клетках левого и нижнего краев. Тогда на пересечении непобитых рядов все клетки — черные, их 400, а все белые — побиты.

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

10. На доске написано 100 различных целых чисел. Каждое число Вася возвел то ли в квадрат, то ли в куб и записал получившиеся 100 чисел на второй доске.

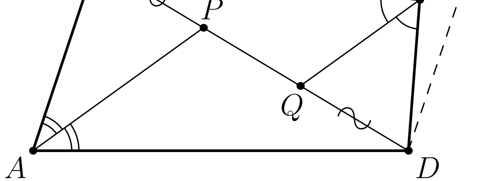

Рис. 3: к задаче 8

Затем Вася возвел то ли в квадрат, то ли в куб каждое из чисел на второй доске (каждый раз выбирая степень наугад) и записывал результаты на третьей доске. Какое наименьшее количество различных чисел могло быть записано на третьей доске?

☐ *Ответ:* 20.

Каждое число на 3-й доске может быть 4-й, 6-й или 9-й степенью числа с 1-й доски. Следовательно, оно могло получиться из корней 4-й, 6-й или 9-й степени. Из положительного числа есть 2 корня 4-й степени (положительный и отрицательный), 2 корня 6-й степени и один корень 9-й степени. Итого, число на 3-й доске могло получиться не более, чем из 5 различных чисел. Пример: выберем 20 различных простых чисел, и для каждого выбранного p запишем на 1-ю доску p^4, p^6, $-p^6$, p^9, $-p^9$. Из каждой такой пятерки на 3-й доске получим p^{36}.

(А. Шаповалов по мотивам дополнительной задачи Кенгуру 2014)

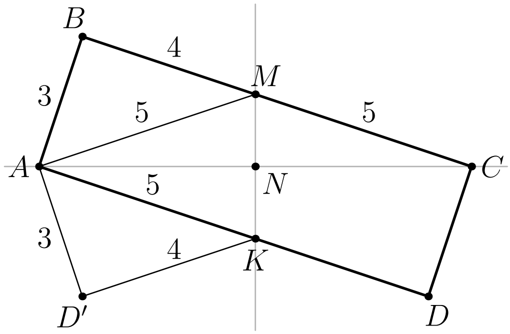

Рис. 4: к задаче 11

11. Бумажный прямоугольник $ABCD$ ($AB = 3$, $BC = 9$) перегнули так, что вершины A и C совпали. Какова площадь получившегося пятиугольника?

☐ *Ответ:* 19.5.

Рис. 4. Заметим, что перегнули по серединному перпендикуляру ℓ к отрезку AC. Пусть M — точка пересечения прямых ℓ и BC, N — середина AC, а из точки D получилась точка D'. Несложно заметить, что $BM = D'K = 4$, $AM = MC = AK = 5$, $AN = 3\sqrt{10}/2$ и $MN = NK = \sqrt{10}/2$. Тогда $S(ABMKD') = 3 \cdot 4 + \sqrt{10}/2 \cdot 3\sqrt{10}/2 = 19.5$.

(дополнительные задачи Кенгуру 2014)

12. Назовем девятизначное число *хорошим*, если в нем можно переставить одну цифру на *другое* место и получить девятизначное число, в котором цифры идут строго по возрастанию. Сколько всего хороших чисел?

☐ *Ответ:* 64.

В хорошем 9-значном числе нет цифры 0, иначе после перестановки 0 встал бы на 1-е место и число стало бы 8-значным. Значит, после перестановки число стало равным $M = 123456789$. Тогда каждое хорошее число можно получить из M перестановкой одной цифры. При перестановке цифры на соседнее место фактически меняются местами 2 соседние цифры. Поскольку есть всего 8 пар соседних цифр, то так можно получить 8 хороших чисел. Осталось рассмотреть перестановки на несоседние места. Крайние цифры 1 и 9 можно переставить на 7 несоседних мест, а каждую из 7 остальных цифр — на 6 несоседних мест. Итого, хороших чисел $8 + 2 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 64$.

(А. Шаповалов)

Старшая лига

Первый тур

13. Числа a и b таковы, что графики $y = ax - b$ и $y = x^2 + ax + b$ ограничивают конечную фигуру ненулевой площади. Докажите, что внутри этой фигуры лежит начало координат.

□ Фигура получится, если графики пересекаются в двух точках, то есть уравнение $ax - b = x^2 + ax + b$ имеет 2 решения. Оно равносильно $x^2 = -2b$, значит, $b < 0$. Тогда корни разных знаков. Значит, ось Oy пересекает фигуру. Она пересекает границы фигуры в точках с ординатами b и $-b$, а между ними лежит начало координат.

(А. Шаповалов)

14. Все вершины правильного многоугольника лежат на поверхности куба, но его плоскость не совпадает ни с одной из плоскостей граней. Какое наибольшее количество вершин может быть у этого многоугольника?

□ *Ответ:* 12.

Оценка. Ясно, что на каждой грани лежит не более 2 вершин многоугольника, поэтому вершин не более 12.

Пример. Проведем через середины 6 ребер сечение в форме правильного шестиугольника. Впишем в этот шестиугольник правильный 12-угольник так, чтобы стороны 12-угольника через одну лежали на сторонах шестиугольника.

(А. Шаповалов)

15. Можно ли клетчатый прямоугольник 12345×6789 разбить по границам клеток на 7890 прямоугольников с одинаковыми диагоналями?

□ *Ответ:* нельзя.

Квадрат длины диагонали равен $m^2 + n^2$, где натуральные числа m и n — длины сторон прямоугольника. Остаток от деления $m^2 + n^2$ на 4 однозначно определяет четность m и n: если 0, то m и n четны, если 1 — то разной четности, если 2 — то оба нечетны. Так как площадь большого прямоугольника нечетна, то есть и малый прямоугольник нечетной площади. В нем стороны нечетны, значит, квадрат диагонали дает остаток 2. Ввиду равенства диагоналей то же верно и для остальных малых прямоугольников. Но четное число нечетных площадей даст в сумме четную площадь. Противоречие.

(А. Шаповалов)

Второй тур

16. Произведение всех натуральных делителей натурального числа n (включая n) оканчивается на 120 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число n? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

☐ *Ответ:* 1, 2, 3, 4, 5.

Квадрат произведения всех делителей n (он оканчивается на 240 нулей) равен n^k, где k — количество делителей n. Это можно понять, разбивая делители на пары $d \cdot (n/d)$. Таким образом, если n оканчивается на s нулей, то $ks = 240$. Заметим, что k кратно $s+1$ (скажем, если n кратно 2^s, но не кратно 2^{s+1}, то все делители разбиваются на группы $x, 2x, \ldots, 2^s x$, где x нечетно, аналогично, если n кратно 5^s, но не 5^{s+1}.) Кроме того, $k \geqslant (s+1)^2$, поскольку каждый из сомножителей 2, 5 входит в разложение n хотя бы в s-ой степени. Таким образом, 240 делится на $s(s+1)$, но $240 \geqslant s(s+1)^2$. Это возможно при $s = 1, 2, 3, 4, 5$.

Примеры: $2 \cdot 5^{119}$, $2^2 \cdot 5^{39}$, $2^3 \cdot 5^{19}$, $2^4 \cdot 5^{11}$, $2^5 \cdot 5^7$.

(по мотивам Кенгуру 2013)

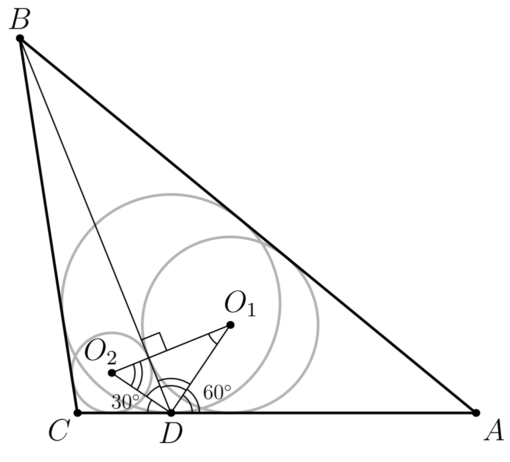

Рис. 5: к задаче 17

17. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D. Оказалось, что $\angle BDC$ равен $60°$. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и CBD касаются стороны BD в одной точке и найдите отношение радиусов этих окружностей.

□ *Ответ:* 3.

Пусть вписанная окружность треугольника BCD касается стороны BD в точке M, а вписанная окружность треугольника BAD касается стороны BD в точке N (рис. 5). Тогда $DM = (DB+DC-BC)/2$ и $DN = (DA+DB-AB)/2$. Так как $DC = (AC+BC-AB)/2$ и $DA = (AC+AB-BC)/2$, то $DC-BC = DA-AB$ и $DM = DN$, что означает, что наши окружности касаются.

Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABD через O_1, а центр вписанной окружности BCD — через O_2. Тогда $\angle O_1DO_2 = 90°$ и DM — высота треугольника O_1DO_2. Заметив, что $\angle MDO_2 = \angle MO_1D = 30°$ и $\angle MDO_1 = \angle MO_2D = 60°$, находим, что отношение радиусов равно $MO_1/MO_2 = 3$.

(М. Волчкевич)

18. 100 аборигенов смогли переправиться в двухместной лодке с левого берега Лимпопо на правый. Изначально каждый об одном или нескольких из остальных слышал слух, что они — вирусоносители лихорадки Эболы. С тем, о ком он такое слышал, абориген вместе в лодку не садился. На левом берегу распространение слухов запрещено, зато достигнув правого берега, аборигены высаживаются, все обмениваются всеми слухами, и только потом лодка возвращается. О каком наименьшем числе аборигенов могло совсем не быть слухов, что они — вирусоносители?

□ *Ответ:* 1.

Пусть о каждом есть слух. Рассмотрим последний рейс — на тот берег плывут аборигены A и B. Тогда предыдущим рейсом один из них, пусть A, приплыл с левого берега и слышал там слух о B. Поэтому они не могут плыть вместе. Противоречие.

Приведем пример, когда ровно об одном только аборигене A нет слухов. Для этого уберем его пока в сторонку. Из оставшихся 99 выберем двоих — B и C, а осталных пронуменуем $D_1, \ldots, D_{97}$. Пусть $D_1, \ldots, D_{97}$ слышали слух друг о друге по циклу. Пусть также B слышал о D_1 и C о D_2. Теперь B отвозит всех с D_{97} по D_2 на правый берег, а сам возвращается. Потом C отвозит D_1 и возвращается за B. Теперь все кроме A на правом берегу. Пусть A слышал слух о B и о C, и только о них. Тогда за ним вернется D_1.

(А. Шаповалов)

Третий тур

19. Барон Мюнхгаузен выписал на доску 10 действительных слагаемых, а их сумму записал на листок. За одну операцию он заменял одно или несколько слагаемых на доске на обратные величины, и снова выписывал сумму на листок. Мог ли он в результате 500 таких операций выписать на листок числа $1, 2, \ldots, 500$?

□ *Ответ:* мог.

Пусть барон выберет в качестве первых 9 слагаемых такие, чтобы $\frac{1}{a_0} - a_0 = 1 = 2^0$, $\frac{1}{a_1} - a_1 = 2^1, \ldots, \frac{1}{a_8} - a_8 = 2^8$ (все эти уравнения сводятся к квадратным и решаются). Слагаемое a_9 он подберёт так, чтобы $a_0 + \ldots + a_9 = 1$. Теперь он может сделать сумму равной любому натуральному числу n от 1 до 511, представив $n-1$ как сумму степеней двойки и заменив в исходной сумме на соответствущие этим степеням слагаемые на обратные. Например, чтобы получить 101, он представит $101 - 1$ как $2^6 + 2^5 + 2^2$, и заменит в исходной сумме на обратные a_2, a_5 и a_6.

(А. Шаповалов)

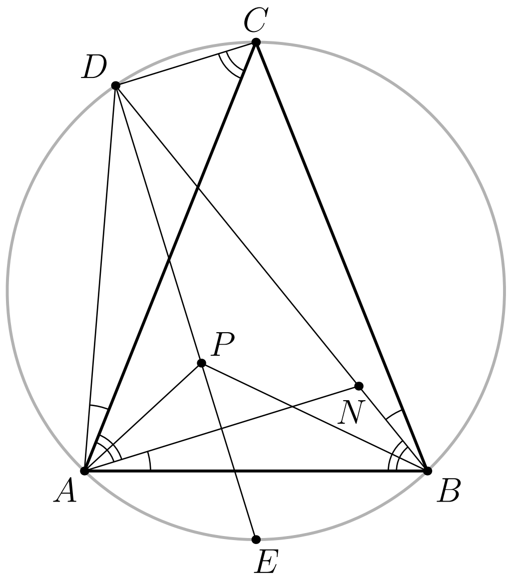

Рис. 6: к задаче 20

20. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) выбрали такую точку N, что $2\angle ANB = 180° + \angle ACB$. Прямая, проходящая через точку C и параллельная AN, пересекает прямую BN в точке D. Биссектрисы углов CAN и ABN пересекаются в точке P. Докажите, что прямые DP и AN перпендикулярны.

□ Заметим, что из равенства $2\angle ANB = 180° + \angle ACB$ следует, что $\angle CAN = \angle ABN$ и $\angle NAB = \angle NBC$. Так как $CD \parallel AN$, то $\angle DCA = \angle CAN = \angle ABN = \angle ABD$. Следовательно, D лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Пусть E — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC (рис. 6). Так как $CD \parallel AN$, то достаточно доказать, что $\angle CDP = 90°$, то есть что DP проходит через E, или что DP — биссектриса угла ADB. Из вписанности четырехугольника $ABCD$ следует, что $\angle DAC = \angle DBC = \angle NBC =$

$\angle NAB$. Тогда $\angle DAP = \angle DAC + \angle CAP = \angle NAB + \angle PAN$. Это означает, что AP — биссектриса угла DAB. С другой стороны, BP — биссектриса угла ABD. Тогда P — точка пересечения биссектрис треугольника DAB, что означает, что DP — биссектриса угла ADB.

(Middle European 2013)

21. При любой раскраске клеток клетчатой доски в черный и белый цвета доска делится на одноцветные области (при шахматной раскраске все области — одноклеточные). Каждым ходом Петя выбирает одну область и перекрашивает её в противоположный цвет. Перекрашенная область склеивается в одну с соседними областями того же цвета, и число областей уменьшается. За какое наименьшее число ходов Петя сможет из шахматно раскрашенной доски 13×13 сделать одноцветную доску?

□ *Ответ:* за 12.

Пример. Каждым ходом перекрашиваем область, содержащую центральную клетку.

Оценка. Склеиваем одноцветные клетки в одну область не только если они соприкасаются сторонами, но и соприкасаются правым нижним и левым верхним углами. Тогда у нас изначально всего 17 областей-диагоналей, их граф соседства образует цепочку из 25 рёбер. При каждом перекрашивании уничтожается не более двух рёбер, значит, нужно не менее 12 перекрашиваний.

(А. Шаповалов)

Четвертый тур

22. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые для всех действительных x удовлетворяют соотношениям

$$\underbrace{f(f(f\ldots f}_{13}(x)\ldots)) = -x, \qquad \underbrace{f(f(f\ldots f}_{8}(x)\ldots)) = x\,.$$

□ С одной стороны, из первого соотношения следует, что

$$\underbrace{f(f(f\ldots f}_{65}(x)\ldots)) = (-1)^5 x = -x\,.$$

С другой стороны, из второго соотношения следует, что

$$\underbrace{f(f(f\ldots f}_{65}(x)\ldots)) = f\Bigl(\underbrace{f(f(f\ldots f}_{64}(x)\ldots))\Bigr) = f(x).$$

Значит, $f(x) = -x$.

(А. Устинов)

23. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 пересекаются в точке P внутри треугольника ABC. Точки O_1, O_2 и O_3 — центры этих окружностей. Докажите, что $4S(O_1O_2O_3) \geqslant S(ABC)$.

□ Так как $O_1O_2 \perp PC_1$ и $O_1O_3 \perp PB_1$, то $\angle O_2O_1O_3 = 180° - \angle B_1PC_1 = \angle BAC$. Аналогично, $\angle O_1O_3O_2 = \angle ACB$ и $\angle O_3O_2O_1 = \angle ABC$. Тогда треугольники ABC и $O_1O_2O_3$ подобны. Рис. 7. Пусть $k = AB/O_1O_2$. Пусть M и N — проекции точек O_1 и O_2 на прямую AB. Заметим, что M — середина AC_1, а N — середина C_1B. Тогда $AB = 2MN \leqslant 2O_1O_2$ и $k \leqslant 2$. С другой стороны, $S(ABC) = k^2S(O_1O_2O_3) \leqslant 4S(O_1O_2O_3)$.

(А. Смирнов по мотивам Macedonia 2014)

24. Докажите, что число способов раскрасить ребра n-угольной призмы в 4 данных цвета так, чтобы на ребрах каждой грани встречались все цвета, не превосходит $8 \cdot 6^{n-1} - 12 \cdot 2^{n-1}$.

□ Поставим призму на стол и занумеруем боковые ребра против часовой стрелки, глядя сверху. Любую требуемую раскраску можно получить так: выбираем цвет для 1-го ребра (4 варианта), раскрашиваем 3 оставшиеся ребра грани, содержащей 1-е и 2-е ребра ($3! = 6$ вариантов), раскрашиваем 3 оставшиеся ребра грани, содержащей 2-е и 3-е ребра (6 вариантов), ..., раскрашиваем 3 оставшиеся ребра грани, содержащей $(n-1)$-е и n-е ребра (6 вариантов), раскрашивает 2 оставшиеся ребра грани, содержащей n-е и 1-е ребра (2 варианта). Так будет получено $4 \cdot 6^{n-1} \cdot 2$ раскрасок. При этом ни один требуемый вариант не будет пропущен и не повторится, но некоторые варианты не годятся (могут совпасть цвета n-го и 1-го рёбер; на верхней или нижней грани может не найтись трёх цветов). В частности, сосчитаем варианты, когда все ребра нижней грани — одного цвета. Выберем цвет нижней грани (4 варианта), а далее повторяем предыдущую конструкцию: выбираем цвет для 1-го ребра (3 варианта), раскрашиваем 2 оставшихся ребра грани, содержащей 1-е и 2-е ребра (2 варианта), раскрашиваем 2 оставшихся ребра грани, содержащей 2-е и 3-е ребра (2 варианта), ..., раскрашиваем 2 оставшихся ребра грани, содержащей $(n-1)$-е и n-е ребра (2 варианта), раскрашивает оставшиеесся ребро грани, содержащей n-е и 1-е ребра (1 вариант). Так будет получено $4 \cdot 3 \cdot 2^{n-1}$ раскрасок. Их и вычтем.

(А. Шаповалов)

Алгебра и теория чисел

Младшая лига

25. Электричка Москва–Петушки проходит начальный путь — от Курского вокзала до Дрезны — втрое дольше, чем от Леоново до Петушков. При этом от Дрезны до Петушков она идёт вдвое быстрее, чем от Курского вокзала до Леоново. Во сколько раз время пути от Курского вокзала до Петушков больше, чем от Дрезны до Леоново?

□ *Ответ:* в пять раз.

Обозначим время пути от Москвы до Петушков через 1 (одна Метафизическая Единица Времени). Тогда, если время от Москвы до Дрезны есть x МЕВ, от Леоново до Петушков — y МЕВ, имеем $x = 3y$, $1 - y = 2(1 - x) = 2(1 - 3y)$, отсюда $5y = 1$, $y = 1/5$, $x = 3/5$, $1 - x - y = 1/5$ — время от Дрезны до Леоново (в частности, мы видим, что Дрезна по дороге от Москвы к Петушкам встречается раньше Леоново.)

(South Africa 2014)

26. Для каких натуральных n найдутся целые x, y, z такие, что

$$x + y + z = 0, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}\ ?$$

□ *Ответ:* для четных n.

Для четного $n = 2k$ возьмем $x = y = 3k$, $z = -6k$. Пусть $x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dy_1$, где x_1, y_1, z_1 не имеют общего делителя, большего 1. Тогда $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ и $1/x_1 + 1/y_1 + 1/z_1 = d/n$. Среди чисел x_1, y_1, z_1 ровно одно четное (иначе либо их сумма нечетна, либо они все четны, что невозможно). Поэтому знаменатель дроби $1/x_1 + 1/y_1 + 1/z_1$ (после сокращения) — четное число, а значит, n не может быть нечетным.

(Iberoamerican 2011)

27. Найдите все совершенные числа, в разложение которых на простые множители каждое простое входит в нечетной степени. (Напомним, что натуральное число называется *совершенным,* если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших самого числа — например, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.)

□ Ответ: $n = 6$.

Пусть p — наименьший простой делитель нашего числа n, $2k + 1$ — степень его вхождения в разложение n на простые множители. Разобьем все делители n на пары $(x, px), (p^2x, p^3x), \ldots, (p^{2k}x, p^{2k+1}x)$, где x — делитель, не кратный p. Сумма в каждой паре кратна $p + 1$, а значит, и общая сумма делителей — равная $2n$ — кратна $p + 1$. Это возможно только при $p = 2$ (иначе $p + 1$ взаимно просто с n в силу минимальности p), так что n делится на $p = 2$ и на $p + 1 = 3$, то есть $n = 6k$. Если $k > 1$, то сумма делителей n не меньше, чем $1 + k + 2k + 3k + 6k = 12k + 1 > 2n$ — противоречие. Значит, $k = 1$ и $n = 6$. Ясно, что 6 подходит.

(IMC 2014)

28. Для натуральных чисел n, k докажите неравенство

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{nk} < \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}\,.$$

□ Требуется доказать, что $A > 1/2$, где

$$A = \left(1 - \frac{1}{k+1} - \ldots - \frac{1}{2k}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k+1} - \ldots - \frac{1}{3k}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)k+1} - \ldots - \frac{1}{nk}\right) + \frac{1}{n}\,.$$

Обозначим j-е слагаемое, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, через x_j. Имеем

$$x_j = \left(\frac{1}{jk} - \frac{1}{jk+1}\right) + \left(\frac{1}{jk} - \frac{1}{jk+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{jk} - \frac{1}{jk+k}\right) =$$
$$= \frac{1}{jk(jk+1)} + \frac{2}{jk(jk+2)} + \ldots + \frac{k}{jk(jk+k)} \geqslant \frac{1+2+\ldots+k}{jk(jk+k)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2j(j+1)} = \frac{1}{2j} - \frac{1}{2(j+1)}$$

Суммируя, получаем

$$A = x_1 + \ldots + x_{n-1} + \frac{1}{n} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\,,$$

что и требовалось.

(олимпиада матмеха СПбГУ 2014)

Старшая лига

29. Решите неравенство

$$20 - 14(20 - 14(20 - \ldots - 14(20 - 14x)\ldots)) > x.$$

Здесь 2014 пар скобок.

□ *Ответ:* $x < 4/3$.

Заменим $x = 4/3 + y$. Тогда

$$20 - 14x = 4/3 - 14y, \quad 20 - 14(20 - 14x) = 4/3 + 14^2 y, \quad \ldots$$
$$20 - 14(20 - 14(20 - \ldots - 14(20 - 14x)\ldots)) = 4/3 - 14^{2015} y\,.$$

Возвращаясь к неравенству, получаем $-14^{2015} y > y$, откуда $y < 0$.

(Соросовская олимпиада 1995)

30. Пусть $R(n)$ — количество представлений натурального числа n в виде суммы $n = a + b$ двух простых чисел (например, $R(3) = 0$, $R(4) = 1$, $R(10) = 3$, поскольку $10 = 3 + 7 = 5 + 5 = 7 + 3$). Докажите, что если $p < q$ — два последовательных простых числа, то сумма

$$2R(q-2) + 3R(q-3) + 5R(q-5) + \ldots + p \cdot R(q-p)$$

кратна q.

☐ Случай $q = 3$ очевиден, пусть $q > 3$. Обозначим искомую сумму через S. Заметим, что она равна сумме от a по всем решениям уравнения $q = a + b + c$ в простых числах. Из соображений симметрии понятно, что сумма от b по тем же тройкам также равна S, как и сумма от c. Таким образом, $3S$ есть сумма от $a + b + c$ по таким тройкам, то есть $3S = mq$, где m — количество этих троек. Итак, $3S$ кратно q, а значит и S кратно q.

(В. Быковский)

31. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f(n+1) > \frac{f(n)+f(f(n))}{2}$ при всех натуральных n.

☐ *Ответ:* $f(n) = n$ при $n \leqslant k$, $f(n) = n + 1$ при $n > k$. Несложно видеть, что все такие функции при каждом $k = 0, 1, \ldots$ подходят.

Докажем индукцией по n, что $f(x) \geqslant n$ при всех $x \geqslant n$. База $n = 1$ очевидна. Переход от n к $n+1$. Пусть $x \geqslant n+1$, тогда $2n \leqslant f(x-1) + f(f(x-1)) < 2f(x)$ (первое неравенство следует из индукционного предположения для n и $x-1 \geqslant n$), откуда $f(x) > n$, что и требовалось.

Таким образом, $f(n) \geqslant n$. Тогда $f(f(n)) \geqslant f(n)$ и $f(n+1) > (f(n) + f(n))/2 = f(n)$, то есть функция f строго возрастает. Положим $f(n) = n + g(n)$. Поскольку f строго возрастает, g не убывает. Условие задачи переписывается как

$$g(n+1) = f(n+1) - n - 1 \geqslant \frac{f(n) + f(f(n)) - 2n - 1}{2} = g(n) + \frac{g(f(n)) - 1}{2}\ .$$

Предположим, что $f(n) \geqslant n + 2$, то есть $g(n) \geqslant 2$. Тогда

$$g(f(n)) \geqslant g(n+2) \geqslant g(n+1) + \frac{g(f(n+1)) - 1}{2} \geqslant$$
$$\geqslant g(n) + \frac{g(f(n+1)) + g(f(n))}{2} - 1 > g(f(n))$$

противоречие. Итак, функция g принимает только значения 0 и 1 и не убывает, это и означает, что f имеет требуемый вид.

(Iran 2014)

32. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — состоящая из натуральных чисел арифметическая прогрессия, причем x_1 и x_2 взаимно просты. Предположим, что произведение членов этой прогрессии имеет $m < n$ простых делителей. Докажите, что $x_1^{n-m} \leqslant (n-1)!$.

□ Для каждого из этих m простых делителей выделим число в нашей прогрессии, в разложение которого на простые множители оно входит в наибольшей степени (любое из таких чисел, если их несколько). Останется не менее чем $n-m$ не выделенных чисел. Достаточно доказать, что их произведение X не больше, чем $(n-1)!$ — а мы докажем, что оно даже делит $(n-1)!$. В самом деле, докажем, что для любого простого p степень вхождения p в X не больше, чем в $(n-1)!$. Пусть x_k — число, выделенное для p. Заметим, что p взаимно просто с разностью $d = x_2 - x_1$ нашей прогрессии, поэтому для всякого $i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ степень вхождения p в число $x_i = x_k + (i-k)d$ такая же, как степень вхождения p в $i-k$. Но произведение чисел вида $(i-k)$ равно $(-1)^{k-1}(k-1)!(n-k)!$, что, как известно, делит $(n-1)!$ — что и требовалось.

(Paul Erdős)

Комбинаторика и логика

Младшая лига

33. Черный снаружи куб $4 \times 4 \times 4$ распилили на 64 единичных кубика. Грани кубиков, примыкающие к распилам — белые. Можно ли сложить из них параллелепипед $1 \times 8 \times 8$, у которого обе грани 8×8 раскрашены в шахматном порядке?

□ *Ответ:* нельзя.

Против черной грани всегда лежит белая, значит, для каждой черной клетки нужен отдельный кубик с черной гранью. Однако на двух шахматных досках 64 черные клетки, а не у всех кубиков есть черная грань.

(Högstadiets Matematiktävling 2002)

34. Есть фонарик, в который помещается 2 батарейки, и есть 10 батареек, из которых 5 хороших и 5 плохих. За одну попытку можно вставить в фонарик 2 батарейки. Он будет светить только когда обе батарейки — хорошие. Как не позднее чем на 8-й попытке наверняка добиться, чтобы фонарик светил?

□ Разобьем батарейки на две тройки и две пары. Попробуем по 3 пары из троек и каждую отдельную пару. Если в тройках все пары плохие, то в каждой из них не менее двух плохих батареек. Если и отдельные пары плохие, то в каждой есть плохая батарейка. Итого, не менее 6 плохих батареек. Противоречие. Значит, хотя бы одна из проверенных пар нам подойдет.

(А. Устинов)

35. Дан правильный 777-угольник. Петя и Вася по очереди проводят его диагонали, начинает Петя. Диагонали не должны пересекаться внутри многоугольника. Проигрывает тот, после чьего хода диагонали разобьют 777-угольник на части, среди которых есть четырехугольная. Кто из игроков выигрывает, как бы ни играл соперник?

□ *Ответ:* выигрывает Вася.

Своим ходом Петя разбивает 777-угольник на m-угольник и n-угольник, где $m < n$. В ответ Вася должен отсечь от n-угольника ещё один m-угольник. Оставшаяся часть будет $(781 - 2m)$-угольником, то есть, нечетноугольником, а значит, не четырехугольником. Далее Вася ответными ходами поддерживает ситуацию с одной или несколькими парами многоугольников с одинаковым числом сторон и отдельным нечетноугольником. А именно, при ходе Пети в многоугольник пары, Вася отвечает аналогичным ходом в другой многоугольник пары. А при ходе Пети в нечетноугольник Вася в ответ отсекает второй многоугольник для пары. Так как у Васи всегда есть ход, он не проигрывает. А так как игра заканчивается (число диагоналей в 777-угольнике конечно!), Вася выигрывает.

(Rioplatense Olympiad 2013, Level 3)

36. В компании из n человек нет тех, которые были бы не знакомы ни с кем, и тех, которые были бы знакомы со всеми остальными. Докажите, что каких-то четверых из них можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый был знаком ровно с одним своим соседом.

□ Пусть человек A имеет ровно одного знакомого — человека B. B не знаком хотя бы с кем-то, пусть с C. C знаком хотя бы с кем-то, пусть с D. Заметим, что D и A не знакомы, так как A знаком только с B. Тогда, посадив подряд A, B, C, D, получим требуемое.

Заменив в рассуждении выше знакомство на незнакомство и наоборот, показываем, что достаточно иметь человека с ровно одним незнакомым.

Пусть нет ни такого, ни такого. Удалив теперь любого человека, получим компанию из $n-1$ человека, удовлетворяющую условию задачи. Ни одна компания из трех человек условию задачи не удовлетворяет, поэтому этот процесс рано или поздно приведет к желаемой четверке.

(Kürschák 2014)

37. Фокусник и ассистент хотят показать следующий фокус. В отсутствие фокусника зрители пишут в секторах круглого барабана n чисел, каждое из которых 0 или 1. Затем ассистент закрывает одно из чисел черной карточкой и зрители вращают барабан. Зашедший после этого фокусник должен угадать число под карточкой. При каких n фокусник и ассистент могут договориться, чтобы этот фокус гарантированно получался?

□ *Ответ:* при $n > 2$.

Легко видеть, что при $n = 1, 2$ ничего не получится. Пусть n нечетно. Тогда найдутся два одинаковых числа подряд. Ассистент закроет из них то, что идет вторым по часовой стрелке. Фокусник гарантированно угадает число, назвав число, написанное предыдущим перед карточкой по часовой стрелке.

Пусть $n > 2$ четно. Если есть три одинаковых числа подряд, то ассистент закроет из них последнее по часовой стрелке. Если есть две отдельные пары одинаковых чисел, идущих подряд, то ассистент в одной из них закроет второе по часовой стрелке. Если же не найдется ни такой тройки, ни таких двух пар, то это значит, что числа попросту чередуются. Тогда ассистент закрывает любое из них. Если зашедший фокусник видит, что есть пара одинаковых чисел подряд, то он понимает, что реализовался один из первых двух случаев, и называет число, идущее перед карточкой по часовой стрелке. В противном случае фокусник понимает, что реализовался последний случай, и называет число, отличное от любого из соседей.

(А. Устинов)

Старшая лига

38. Муха ползает по ребрам октаэдра, причем, выползая из одной вершины по некоторому ребру, она доползает до другой (а не возвращается обратно с полпути). Может ли однажды оказаться, что она в одной из вершин побывала 2014 раз, а в каждой из остальных — 650 раз?

☐ *Ответ:* нет, не может.

Пусть так случилось. В двух противоположных вершинах она побывала 2664 раза, после каждого такого раза (кроме последнего) она должна была попасть в одну из 4 других вершин, но в них она была всего лишь 2600 раз. Противоречие.

(Math League Tournaments)

39. Фокусник и ассистент хотят показать следующий фокус. В отсутствие фокусника зрители пишут в секторах круглого барабана девять чисел, каждое из которых 0 или 1. Затем ассистент закрывает одно из чисел черной карточкой и зрители вращают барабан. Зашедший после этого фокусник должен угадать число под карточкой. Могут ли фокусник и ассистент договориться, чтобы этот фокус гарантированно получался?

☐ *Ответ:* могут.

Так как число 9 нечетно, найдутся два одинаковых числа подряд. Ассистент закроет из них то, что идет вторым по часовой стрелке. Фокусник гарантированно угадает число, назвав число написанное предыдущим перед карточкой по часовой стрелке.

(А. Устинов)

40. В школе учатся 400 человек, из них 200 двоечников и 200 отличников. На Новый Год Дед Мороз привез мешок, в котором есть 800 конфет «Миндаль Иванович». Он хочет раздать их все детям, причем каждый двоечник должен получить не больше одной конфеты, а каждый отличник — хотя бы 2 конфеты, причем четное количество. Директор школы решил, кроме того, поощрить отличников, приготовив 600 мандаринов, которые хочет раздать так, чтобы каждому отличнику досталось не менее одного. У кого больше способов раздать свои подарки и во сколько раз?

□ *Ответ:* способов поровну.

Построим взаимно-однозначное соответствие. Пусть каждый отличник возьмет шефство над одним из двоечников (разные отличники над разными двоечниками). Если директор дает $2k+1$ мандаринов некому отличнику, Дед Мороз может дать ему $2k+2$ конфеты, а его подшефному 0 конфет. Если же директор дает отличнику $2k$ мандаринов, пусть Дед Мороз даст его подшефному 1 конфету, а ему самому $2k$ конфет.

(фольклор)

41. Класс выиграл приз в виде мешка с 2014 монетами, который в начале находится у старосты (а у других детей в классе денег нет). При встрече два одноклассника делят деньги поровну между собой, если у них четное количество монет в сумме. А если в сумме количество нечетное, то одну монету они отдают классному руководителю, а остальные делят поровну между собой. Через некоторое время все монеты оказались у классного руководителя. Какое наименьшее количество детей могло быть в классе?

□ *Ответ:* 12 детей.

Покажем индукцией по k, что $k+1$ людей могут избавиться от 2^k-1 монет, находящихся изначально у одного из них (и от меньшего числа монет). При $k=1$ это ясно, индукционный переход от k к $k+1$ тоже ясен: после первой встречи остается 2 человека, имеющих не более чем по $2^{k-1}-1$ монет и k человек без монет. Тогда $k+1$ человек по индукционному предположению избавляются от своих монет, после чего то же делает другой набор из $k+1$ человек.

Теперь покажем, что если изначально у одного из людей было хотя бы 2^k монет, и в какой-то момент в обменах участвовало m людей, $m \leqslant k+1$, то у каждого из них хотя бы 2^{k+1-m} монет. Тогда при $m=k+1$ получим, что $k+1$ человек не могут избавиться ото всех монет. Индукция по числу обменов. База для 0 обменов очевидна. Если в очередном обмене не участвует новый человек, то у участвовавших остается хотя бы по 2^{k+1-m} монет. Если участвует, то m увеличивается на 1, а величина 2^{k+1-m} уменьшается вдвое, так что утверждение по-прежнему верно.

(Skolornas Matematiktävling 2014)

42. На клетках шахматной доски лежит по алмазу так, что в каждой паре соседних (по стороне) клеток веса алмазов отличаются меньше, чем на 1 карат. Докажите, что эти алмазы можно разложить по одному в клетки прямоугольника 2×32 так, чтобы по-прежнему в каждой паре соседних клеток веса алмазов отличались меньше, чем на 1 карат.

□ Упорядочим массы алмазов $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_{64}$.

Лемма. Для всякого $i < 63$ выполнены неравенства $m_i - m_{i+2} < 1$, а значит и $m_i - m_{i+1} < 1$.

Доказательство леммы. В доске можно провести два непересекающихся клетчатых пути от алмаза с массой m_i до алмазов с массой m_{i+1} и m_{i+2}. Пусть первый алмаз от i-го на первом из путей с номером больше i, имеет номер k. На втором пути аналогичный алмаз имеет номер l. Легко видеть, что $0 \leqslant m_i - m_l < 1$ и $0 \leqslant m_i - m_k < 1$, так как предыдущий алмаз имеет массу не меньше m_i и за один шаг по пути она меняется меньше, чем на единицу. Тогда эти неравенства тем более верны для $i+1$ и $i+2$. Лемма доказана.

Будем считать, что в прямоугольнике 2×32 столбцы имеют высоту в две клетки. Тогда в j-ом столбце расположим сверху алмаз массой m_{2j-1}, а снизу — алмаз массой m_{2j}. Номера любых соседних камней отличаются не более чем на 2, а по лемме их массы отличаются менее чем на один. Значит, получена требуемая расстановка.

(А. Шаповалов)

Геометрия

Младшая лига

43. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CL. Известно, что точка L равноудалена от вершины прямого угла B и середины гипотенузы AC. Найдите угол BAC.

☐ *Ответ:* 30°.

Пусть M — середина AC. Опустим из точки L перпендикуляр LN на гипотенузу AC. Поскольку L находится на биссектрисе угла BCA, то $LB = LN$. По условию $LB = LM$. Значит, точки M и N совпадают. Рис. 8. Тогда LM является одновременно медианой и высотой в треугольнике ALC, т. е. этот треугольник равнобедренный. Поэтому $\angle LAC = \angle ACL = \angle BCL$. В то же время $\angle LAC + \angle ACL + \angle BCL = 90°$. Таким образом, $\angle BAC = \angle LAC = 30°$.

(Ф. Нилов)

44. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $\angle BCA + \angle CAD = 180°$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD + BC$.

☐ Отметим на продолжении луча BC за точку C такую точку E, что $CE = AD$ (рис. 9). Тогда $\angle ACE = 180° - \angle ACB = \angle CAD$ и треугольники ACE и CAD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $CD = AE$ и $AD + BC = BE < AB + AE = AB + CD$.

(А. Смирнов по мотивам сербской окружной олимпиады 2014)

45. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD, $AB > CD$, а прямая BD делит угол $\angle ADC$ пополам. Прямая, проходящая через C параллельно AD, пересекает отрезки BD и AB в точках E и F соответственно. Точка O — центр

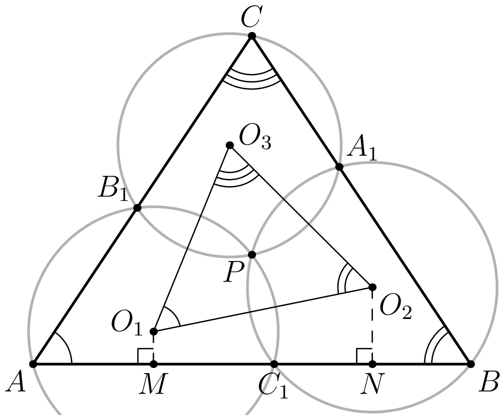

Рис. 7: к задаче 23

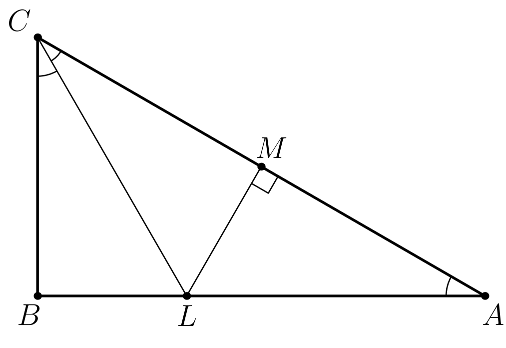

Рис. 8: к задаче 43

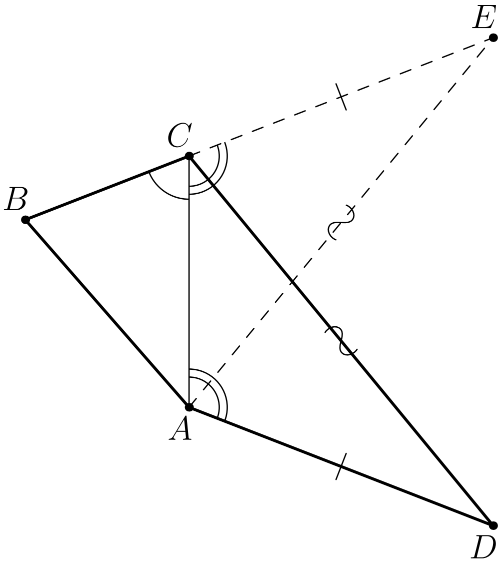

Рис. 9: к задаче 44

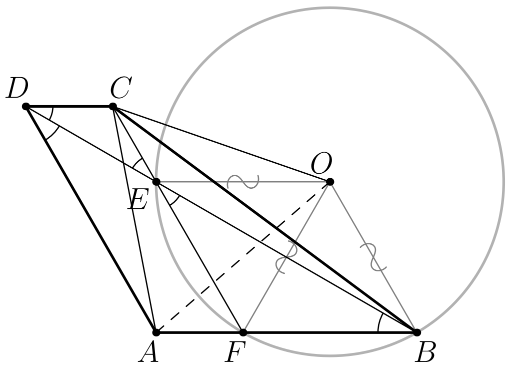

Рис. 10: к задаче 45

описанной окружности треугольника BEF. Предположим, что $\angle ACO = 60°$. Докажите, что $CF = AF + FO$.

□ Рис. 10. Заметим, что из параллельности следует, что $\angle CDE = \angle EBF = \angle ADE = \angle DEC$. Тогда $AF = DC = CE$ и $EF = FB$. С другой стороны, $OF = OE$, поэтому треугольники OEF и OFB равны и $\angle OFB = \angle OFE = \angle OEF$. Следовательно, $\angle AFO = \angle CEO$ и треугольник AFO равен треугольнику CEO по двум сторонам и углу между ними. Это означает, что $AO = OC$, $\angle COE = \angle AOF$ и, так как $\angle ACO = 60°$, то треугольник AOC равносторонний и $\angle COA = 60°$. Тогда $\angle EOF = \angle COA + \angle AOF - \angle COE = 60°$, и треугольник ABC также равносторонний, откуда $EF = FO$. Поэтому $AF + FO = CE + EF = CF$.

(Middle European 2012)

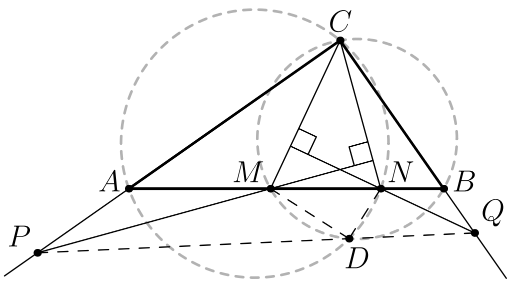

Рис. 11: к задаче 46

46. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны такие точки M и N, что $AM < AN$. Прямая, проходящая через M и перпендикулярная CN, пересекает прямую AC в точке P. Прямая, проходящая через N и перпендикулярная CM, пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что описанные окружности треугольников APM и BNQ и прямая PQ имеют общую точку.

□ Рис. 11. Пусть D — вторая точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников ACN и BCM. Тогда

$$\angle ADM = \angle ADC - \angle MDC = \angle ANC - \angle MBC = \\ = \angle NCB = 90° - \angle ACN = \angle APM\,.$$

Следовательно, точки A, M, P и D лежат на одной окружности. Аналогично, точки B, N, Q и D лежат на одной окружности. С другой стороны,

$$\angle PDQ = \angle PDM + \angle MDC + \angle CDN + \angle NDQ = \\ = \angle CAM + \angle MBC + \angle CAN + \angle NBC = 180°\,.$$

Это означает, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

(Iran 2014)

Старшая лига

47. Замкнутая шестизвенная ломаная в пространстве такова, что каждое её ребро параллельно одной из координатных осей прямоугольной системы координат. Докажите, что её вершины лежат на одной сфере или в одной плоскости.

□ Предположим, что среди направлений ребер $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_5A_6$ нашей ломаной $A_1 \ldots A_6$ не встречается направление оси Oz. Тогда все эти вершины лежат в плоскости, параллельной Oxy и проходящей через A_1. Аналогично разбираются случаи, когда одно из направлений координатных осей встречается среди направлений ребер не более одного раза. Осталось разобрать случай, когда каждое встречается ровно два раза. Рассматривая абсциссы вершин нашей ломаной мы видим, что при изменении $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1$ абсциссы A_i меняются дважды, то есть принимают всего два значения a и b. Рассмотрим точку, абсцисса которой равна $(a+b)/2$, ордината и аппликата определяются аналогично. Легко видеть, что она равноудалена от концов любого ребра ломаной, и, стало быть, от всех её вершин.

(Iran 2014)

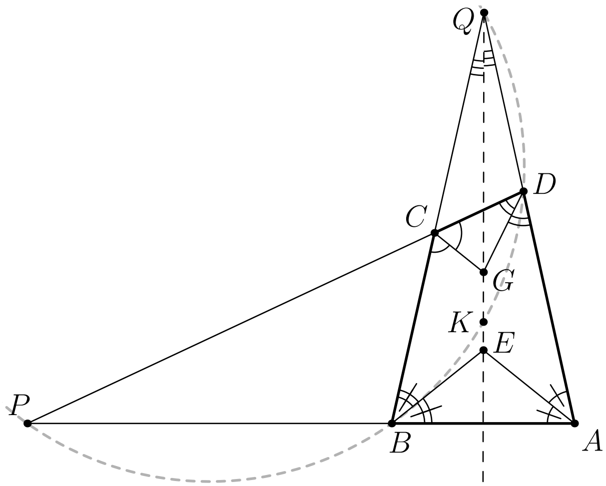

Рис. 12: к задаче 48

48. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы $\angle B$ и $\angle D$ равны. Оказалось, что точки пересечения биссектрис соседних углов $ABCD$ образуют выпуклый четырехугольник $EFGH$ (E лежит на биссектрисах $\angle A$ и $\angle B$, F — $\angle B$ и $\angle C$, и т. д.). Пусть K — точка пересечения диагоналей $EFGH$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD — в точке Q. Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника BKQ.

□ Рис. 12. Заметим, что $\angle PBQ = 180° - \angle ABC = 180° - \angle ADC = \angle PDQ$. Тогда четырехугольник $PBDQ$ вписанный. Обозначим его описанную окружность через s. Так как E — точка пересечения биссектрис углов A и B, то E

лежит на биссектрисе угла BQD. Так как G — точка пересечения биссектрис углов C и D, то G лежит на этой биссектрисе BQD. Тогда и K лежит на этой биссектрисе. Аналогично, K лежит на биссектрисе угла BPD. Осталось заметить, что эти биссектрисы пересекаются в середине дуги BD окружности s. Это означает, что точка K является серединой этой дуги, и, следовательно, лежит на окружности s.

(Middle European 2012)

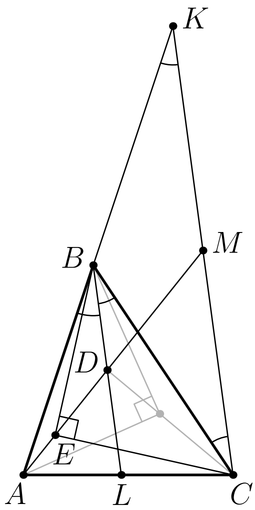

Рис. 13: к задаче 49

49. Точка D — середина биссектрисы BL треугольника ABC. На отрезках AD, DC выбраны точки E, F соответственно так, что углы $\angle BEC$ и $\angle BFA$ — прямые. Докажите, что точки A, E, F, C лежат на одной окружности.

□ Рис. 13. Пусть точка K на продолжении отрезка AB за точку B такова, что $BK = BC$. Имеем $2\angle ABL = \angle ABC = \angle BKC + \angle BCK = 2\angle BKC$, так что $KC \parallel BL$ и треугольники ABL и AKC гомотетичны с центром A. При этой гомотетии точка D — середина BL — переходит в середину KC точку M, так что D лежит на отрезке AM. Четырехугольник $BMCE$ вписан в окружность с диаметром BC, так что $\angle DEC = \angle MEC = \angle MBC = 90^\circ - \angle CBD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$. Значит, $\angle AEC = 180^\circ - \angle DEC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC$. Аналогично, $\angle AFC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC$, а равенство углов $\angle AEC = \angle AFC$ как раз и равносильно тому, что точки A, C, F, E лежат на одной окружности.

(Украина 2014, задача 10.8)

50. Множество точек в пространстве назовем интересным, если для любой плоскости вне её находится хотя бы 100 точек этого множества. При каком наименьшем d можно утверждать наверняка, что любое интересное множество точек в пространстве содержит интересное подмножество не более чем с d точками?

□ *Ответ:* $d = 300$.

Приведем пример, показывающий, что интересное множество из 300 точек может не содержать меньших интересных подмножеств: на каждой из координатных осей выберем 100 точек, отличных от начала координат.

Теперь докажем, что если в интересном множестве M хотя бы 301 точка, можно одну из них удалить так, что оно останется интересным. Предположим противное: при удалении любой точки $a \in M$ найдется плоскость α, вне которой не более 99 точек множества $M \setminus a$. Значит, вне плоскости α находится ровно 100 (меньше не может быть из-за интересности) точек множества M, одна из них a. Отметим эти 100 точек и выберем одну из неотмеченных точек b. Для нее найдется плоскость β, вне которой лежит точка b и еще 99 точек. Отметим те из этих ста точек, которые еще не отмечены, выберем неотмеченную точку c и построим для нее аналогичным образом плоскость γ и отметим точку c и еще не отмеченные точки вне γ. Заметим, что плоскости α, β, γ различны (поскольку $b \in \alpha \setminus \beta$, $c \in (\alpha \cap \beta) \setminus \gamma$). Кроме того, эти плоскости не могут иметь общей прямой, поскольку пересечение плоскостей α и β не содержится в плоскости γ. Итак, они имеют не более одной общей точки. Однако все неотмеченные точки множества M лежат в их пересечении. Отсюда видим, что M содержит ровно 301 точку: одну неотмеченную точку p и 300 отмеченных по одному разу. Отсюда видим, что множество M содержит по 100 отмеченных точек на каждой из прямых $\alpha \cap \beta$, $\beta \cap \gamma$, $\alpha \cap \gamma$ и точку $p = \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Несложно видеть, что в этом случае множество $M \setminus p$ интересное — противоречие.

(IMC 2014)

Командная олимпиада

Младшая лига

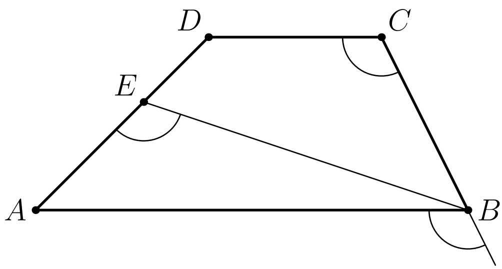

Рис. 14: к задаче 51

51. (4) В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD описанная окружность треугольника BCD пересекает отрезок AD в точке E (отличной от A и D). Докажите, что описанная окружность треугольника ABE касается прямой BC.

□ Пусть K — точка на продолжении луча CB за точку B. Рис. 14. Заметим, что $\angle AEB = \angle DCB = \angle ABK$. Тогда утверждение задачи следует из свойства касательной.

(Baltic Way 2013)

52. (4) Можно ли среди чисел $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ выбрать три, произведение которых равно 1?

□ Предположим, что это возможно сделать. Тогда $\frac{a}{101-a} \cdot \frac{b}{101-b} \cdot \frac{c}{101-c} = 1$. То есть, $abc = (101-a)(101-b)(101-c)$. Переходя к сравнениям по модулю 101, получаем, что $abc \equiv -abc \pmod{101}$, или $2abc$ делится на 101. Заметив, что число 101 простое, получаем, что одно из чисел a, b или c делится на 101, что противоречит тому, что они меньше 101 и больше 0.

(Högstadiets Matematiktävling 1997/1998)

53. (6) В строке в некотором порядке записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Пару чисел назовем *лункой*, если эти числа стоят рядом, либо между ними есть только числа, меньшие каждого из них. Каково наибольшее количество лунок? (Одно число может входить в несколько лунок.)

□ *Ответ:* $2n-3$.

В каждой лунке проведем стрелку от меньшего числа к большему. Заметим, что из каждого числа k в одну сторону не могут выходить 2 стрелки: число на конце более короткой окажется меньше k. Итак, из чисел $1, 2, \ldots, n-2$ выходит не более чем по 2 стрелки, а из числа $n-1$ — не более одной, итого — не более $2n-3$. Это достигается: поставим 1 в середину, и будем добавлять по порядку числа $2, 3, \ldots, n$ по краям, строго чередуя края.

(А. Лебедев, А. Шаповалов)

54. (7) В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

□ На каждой из двух дуг, стягивающих концы хорды, лежит по одному концу каждой другой хорды (иначе бы хорды не пересекались). Поэтому, если пронумеровать концы хорд в порядке обхода окружности, номера концов каждой хорды будут отличаться ровно на 100. Проведем произвольный диаметр, не проходящий через концы хорд. Если вращать его непрерывно, то при переходе через любой конец число концов справа от него будет меняться не более, чем на 1. Если вначале число концов справа от него больше 100, то при повороте на 180° оно станет меньше 100. Ввиду дискретной непрерывности в какой-то момент это число было равным 100. Значит, в этот момент концы каждой хорды были по разные стороны от диаметра, и он пересекал все хорды.

(А. Шаповалов)

55. (7) Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению $2a^2 + a = 3b^2 - b$. Докажите, что $a + b$ — точный квадрат.

□ Перенося $2b^2$ налево, получаем, что $2(a^2 - b^2) + a + b = b^2$ и $(a + b)(2a - 2b + 1) = b^2$. Осталось заметить, что числа $a + b$ и $2a - 2b + 1$ взаимно просты и, следовательно, каждое из них точный квадрат.

(по мотивам Skolornas Matematiktävling 2014 Qualification Round)

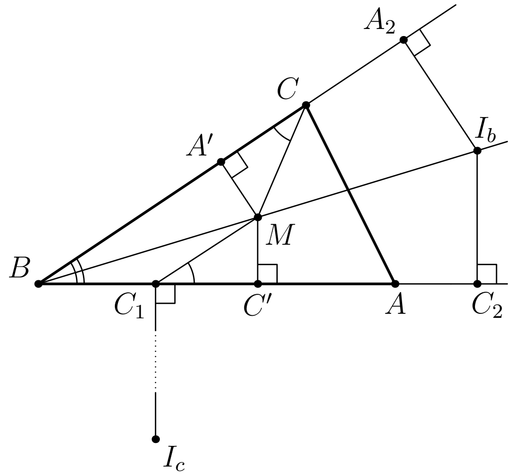

Рис. 15: к решению задачи 56

56. (7) Точка I_b — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Другая вневписанная окружность касается стороны AB в точке C_1. Докажите, что точки B, C, C_1 и середина отрезка BI_b лежат на одной окружности.

□ Рис. 15. Пусть M — середина BI_b. Опустим из точки M перпендикуляры MA' и MC' на стороны BC и BA. Так как M лежит на биссектрисе угла B, то $MA' = MC'$. Опустим из точки I_b перпендикуляры I_bA_2 и I_bC_2 на стороны BC и BA. Тогда $2BA' = BA_2 = BC_2 = 2BC' = p$, где $2p = a + b + c$. Это означает, что $C_1C' = |BC' - BC_1| = |p/2 - (p - a)| = |a - p/2|$ и $CA' = |a - p/2|$, то есть, что $C_1C' = CA'$. Следовательно, треугольник $C_1C'M$ равен треугольнику $CA'M$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle BC_1M + \angle BCM = 180^\circ - \angle MC_1C' + \angle BCM = 180^\circ$, что означает, что точки B, C, C_1 и M лежат на одной окружности.

(по мотивам олимпиады матмеха СПбГУ 2014)

57. (8) На доске написан многочлен $x^2 + x + 2014$. Саша и Федя ходят по очереди, начинает Федя. Федя каждым ходом должен увеличить или уменьшить коэффициент при x на 1, а Саша каждым ходом должен увеличить или уменьшить свободный член на 1. Федя выиграет, если в какой-то момент у многочлена будет целый корень. Докажите, что Саша не сможет помешать ему выиграть.

□ Будем следить за значением многочлена в точке 2. Вначале оно равно 2020. Каждым ходом Федя меняет его на 2, а Саша — на 1. Цель Феди — сделать значение равным 0, тогда у многочлена будет целый корень $x = 2$.

Пусть каждым ходом Федя уменьшает это значение на 2. Тогда после каждой пары ходов Саша-Федя значение уменьшается на 1 или на 3. Значит, в какой-то момент после такой пары ходов оно станет равным -1, 0, или 1. Если 0, Федя победил, иначе ходит Саша. Он сделает значение равным -2, 0 или 2. Если 0, Федя победил, иначе он своим ходом делает значение равным 0.

(India 2014)

58. (8) По кругу стоят 35 чисел. Любые два соседних отличаются не менее чем на 1. Докажите, что сумма квадратов всех чисел не меньше 10.

□ Во-первых, если $|x-y| \geqslant 1$, то $x^2+y^2 = \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2} \geqslant \frac{1}{2}$. Предположим, что удалось найти в круге три подряд идущих числа, сумма квадратов которых не меньше 2. Тогда остальные разбиваются на 16 пар, в каждой сумма квадратов не меньше 1/2, в сумме как раз не меньше 10. Заметим, что среди наших чисел есть либо два рядом стоящих неотрицательных, либо два рядом стоящих неположительных. Рассмотрим первый случай, второй сводится к нему сменой знаков у всех 35 чисел. Пусть меньшее из наших двух соседних чисел равно $a \geqslant 0$, тогда большее $b \geqslant a+1$. Пусть a стоит между b и c. Если $a \geqslant 1$, то $b^2 \geqslant 4 > 2$, если же $a < 1$, то $|c| \geqslant 1-a$ и $a^2+b^2+c^2 \geqslant a^2+(a+1)^2+(1-a)^2 = 2+3a^2 \geqslant 2$, что и требовалось.

(Mathlinks)

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=612590

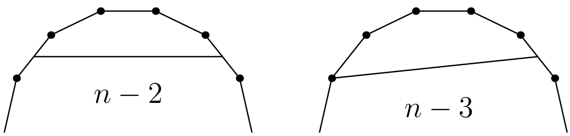

Рис. 16: к решению задачи 59

59. (9) Для каких n выпуклый n-угольник можно разрезать на выпуклые шестиугольники?

□ *Ответ:* $n=6$ и $n \geqslant 8$.

Если $n \geqslant 9$, то задачу о разбиении n-угольника можно свести к задаче о разбиении $(n-2)$- или $(n-3)$-угольника, отрезав один шестиугольник (рис. 16). Поэтому задача разрешима для любого $n \geqslant 8$ (и, очевидно, разрешима для $n=6$). Докажем, что при $n = 3$, 4, 5, 7 задача неразрешима.

Заметим, что среднее арифметическое всех углов шестиугольников равно $120°$. В то же время в каждой внутренней вершине, в которой сходятся вершины хотя бы трех шестиугольников, оно не больше $120°$, в каждой вершине, лежащей на стороне (разбиваемого многоугольника или одного из шестиугольников) — не больше $90°$. Если $n \leqslant 5$, то среднее значение углов шестиугольников по вершинам разбиваемого многоугольника меньше $120°$ — всё это в совокупности дает противоречие. Если $n=7$ и хотя бы из одной вершины разбиваемого многоугольника выходят отрезки внутрь, верно то же самое: сумма углов в семи вершинах равна $5 \cdot 180^\circ$, а их количество не меньше 8, итого среднее меньше 120°. Наконец, если $n = 7$ и из вершин семиугольника не выходит отрезков внутрь, то есть хотя бы две стороны семиугольника, на которых отмечены вершины шестиугольников разбиения, среднее по этим двум точкам и вершинам не больше чем $(5 \cdot 180^\circ + 2 \cdot 180^\circ)/11 < 120^{circ}$, дальше то же самое.

(В. Быковский, А. Устинов)

Старшая лига

60. (3) Можно ли среди чисел $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ выбрать пять, произведение которых равно 1?

□ Предположим, что это возможно сделать. Тогда

$$\frac{a}{101-a} \cdot \frac{b}{101-b} \cdot \frac{c}{101-c} \cdot \frac{d}{101-d} \cdot \frac{e}{101-e} = 1.$$

То есть, $abcde = (101-a)(101-b)(101-c)(101-d)(101-e)$. Переходя к сравнениям по модулю 101, получаем, что $abcde \equiv -abcde \pmod{101}$ или $2abcde$ делится на 101. Заметив, что число 101 простое, получаем, что одно из чисел a, b, c, d или e делится на 101, что противоречит тому, что они меньше 101 и больше 0.

(Högstadiets Matematiktävling 1997/1998)

61. (5) В строке в некотором порядке записаны числа $1, 2, \ldots, n$. Пару чисел назовем *лункой*, если эти числа стоят рядом, либо между ними есть только числа, меньшие каждого из них. Каково наибольшее количество лунок? (Одно число может входить в несколько лунок.)

□ *Ответ:* $2n - 3$. См. решение задачи 53.

(А. Лебедев, А. Шаповалов)

62. (6) Точка I_b — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Другая вневписанная окружность касается стороны AB в точке C_1. Докажите, что точки B, C, C_1 и середина отрезка BI_b лежат на одной окружности.

□ См. решение задачи 56.

(по мотивам олимпиады матмеха СПбГУ 2014)

63. (6) Докажите, что для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ положительных чисел найдется такой номер n, что $\frac{1+a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

□ Предположим противное, тогда $\frac{a_{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{a_n}{n} - \frac{1}{n+1}$, то есть для последовательности $b_n = \frac{a_n}{n}$ имеем $b_{n+1} \leqslant b_n - \frac{1}{n+1}$. Отсюда $0 < b_k \leqslant b_1 - (1/2 + \ldots + 1/k)$. Но при достаточно больших k выражение $C_k = 1/2 + \ldots + 1/k$ будет больше, чем b_1 (например, потому, что $C_{2k} - C_k = 1/(k+1) + \ldots + 1/2k \geqslant k/2k = 1/2$).

(фольклор)

64. (7) Сферы S_1, S_2 и S_3 касаются друг друга внешним образом и касаются некоторой плоскости в точках A, B и C. Сфера S касается сфер S_1, S_2 и S_3 внешним образом и касается данной плоскости в точке D. Докажите, что проекции точки D на стороны треугольника ABC являются вершинами правильного треугольника.

□ Обозначим через r_1, r_2, r_3 и r радиусы сфер S_1, S_2, S_3 и S, соответственно. Как легко видеть, $AB = 2\sqrt{r_1r_2}$, $BC = 2\sqrt{r_2r_3}$, $AD = 2\sqrt{r_1r}$, $DC = 2\sqrt{r_3r}$. Значит, $AB/CB = AD/CD$. Обозначим проекции точки D на стороны AB, BC и CA через X, Y и Z. Заметим, четырехугольник $AXDZ$ — вписанный, а AD — диаметр описанной вокруг $AXDZ$ окружности. Тогда по теореме синусов $XZ = AD \cdot \sin(\angle A)$. Аналогично, $YZ = CD \cdot \sin(\angle C)$. Поэтому $\frac{XZ}{YZ} = \frac{AD \cdot \sin(\angle A)}{CD \cdot \sin(\angle C)} = \frac{AB \cdot \sin(\angle A)}{CB \cdot \sin(\angle C)} = 1$, где последнее равенство следует из теоремы синусов для треугольника ABC. Итак, $XZ = YZ$. Аналогично $YZ = YX$.

(фольклор)

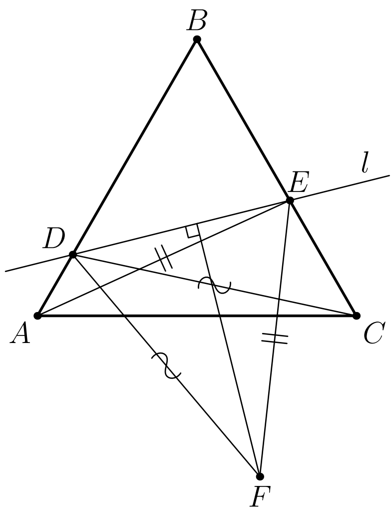

Рис. 17: к задаче 65

65. (7) Через центр правильного треугольника ABC провели произвольную прямую l, пересекающую стороны AB и BC в точках D и E. Построили точку F такую, что $AE = FE$ и $CD = FD$. Докажите, что расстояние от точки F до прямой l не зависит от выбора этой прямой.

□ Рис. 17. Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCS$ с основанием ABC. Заметим, что $SE = AE = FE$ и $SD = CD = FD$. Поэтому треугольники FDE и SDE равны. Обозначим через O центр правильного треугольника ABC. Поскольку прямая SO перпендикулярна плоскости ABC, то отрезок SO является высотой в треугольнике SDE. Значит, расстояние от точки F до прямой l равно SO и не зависит от прямой l.

(М. Волчкевич)

66. (8) Для каких n выпуклый n-угольник можно разрезать на выпуклые шестиугольники?

□ *Ответ:* $n = 6$ и $n \geqslant 8$.

См. решение задачи 59.

(В. Быковский, А. Устинов)

67. (8) Многочлен $f(x)$ степени $2n - 1$ с вещественными коэффициентами таков, что многочлен $(f(x))^2 - f(x)$ делится на многочлен $(x^2 - x)^n$. Чему может равняться старший коэффициент многочлена $f(x)$?

□ *Ответ:* $\pm\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}$.

Поскольку произведение $f(x)(f(x) - 1)$ делится на $x^n(x - 1)^n$, а один из сомножителей $f(x)$ и $f(x) - 1$ не кратен x, то один из них делится на x^n. Аналогично, один из них кратен $(x - 1)^n$, причем другой — иначе степень $f(x)$ была бы не меньше $2n$. Не умаляя общности, $f(x)$ кратен $(x - 1)^n$, $f(x) - 1$ кратен x^n (иначе заменим $f(x)$ на многочлен $1 - f(x)$). Заметим, что если есть два таких многочлена $f(x)$ и $g(x)$ степени меньше чем $2n$, то их разность $f(x) - g(x)$ делится как на x^n, так и на $(x - 1)^n$, а это возможно только при $f(x) - g(x) \equiv 0$. Итак, имеется не более одного многочлена $f(x)$ с нужными свойствами, так что осталось предъявить один и вычислить его старший коэффициент (у многочлена $1 - f(x)$ старший коэффициент будет другого знака). Положим $F(t, k) = (t + 1)(t + 2) \ldots (t + k - 1)/(k - 1)!$. Рассмотрим многочлены $g_0(x) = 1$, $g_k(x) = F(0, k) + F(1, k)x + \ldots + F(n - 1, k)x^{n-1}$ при $k = 1, \ldots$ Несложно установить, что $(1 - x)g_k(x) \equiv g_{k-1}(x) \pmod{x^n}$: совпадение коэффициентов при x^t равносильно непосредственно проверяемому тождеству $F(t, k) - F(t - 1, k) = F(t, k - 1)$. Отсюда $(1 - x)^n g_n(x) \equiv g_0(x) = 1 \pmod{x^n}$, так что многочлен $f(x) = (1 - x)^n g_n(x)$ удовлетворяет обоим требованиям, осталось посчитать его коэффициент при x^{n-1}: он равен $(-1)^n F(n - 1, n) = (-1)^n \frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2}$.

(North Countries Universities Mathematical Competition 2014)

68. (10) В куче лежит $n > 1$ камней. Двое по очереди берут из кучи камни. Первым ходом можно взять любое количество камней от 1 до $n - 1$. Каждым следующим ходом можно брать любое количество камней от 1 до $2k$, где k — количество камней, взятых на предыдущем ходу противником. Выигрывает взявший последний камень. Определите, при каких n второй игрок имеет выигрышную стратегию.

□ Обозначим n-е число Фибоначчи через F_n. Напомним, что $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для всех $n \geqslant 2$. *Ответ:* второй игрок выиграет при $n = F_k$ для $k \geqslant 3$.

Обозначим через (n, m) позицию, при которой осталось n шаров, и игрок может взять не более m из них, $m > 0$ (т. е. если противник предыдущим ходом забрал k шаров, то $m = 2k$). Разложим n в фибоначчиеву систему счисления: $n = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_r}$, где $i_1 > i_2 > \cdots > i_r \geqslant 2$ и индексы i_j не соседние (при этом, F_{i_1} определяется однозначно как наибольшее число Фиббоначи, не превосходящее n, F_{i_2} — наибольшее, не превосходящее $n-F_{i_1}$, и т. д.). Индукцией по n докажем, что позиция (n, m) проигрышная тогда и только тогда, когда $m < F_{i_r}$.

База $n = 1$ очевидна. Пусть для всех чисел меньше n наше утверждение верно. Запишем $n = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_r}$. Если $m \geqslant F_{i_r}$, то, взяв F_{i_r} шаров, получаем (так как $i_{r-1} \geqslant i_r + 2$ и $F_{i_{r-1}} > 2F_{i_{r-1}-2} \geqslant 2F_{i_r}$) проигрышную позицию, и, следовательно, изначальная позиция была выигрышной.

Осталось доказать, что мы не сможем попасть в проигрышную позицию при $m < F_{i_r}$. Пусть взяв x шаров, мы попали в проигрышную позицию $(n-x, 2x)$ и $n - x = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_{r-1}} + F_{j_1} + F_{j_2} + \ldots + F_{j_s}$. Заметим, что $n \geqslant (n-x)+F_{j_s-1}$, откуда $x \geqslant F_{j_s-1}$. Следовательно, $2x \geqslant F_{j_s}$, и исходная позиция выигрышная.

Осталось заметить, что исходная позиция имеет вид $(n, n-1)$, и является проигрышной (для первого игрока) только при $n-1 < F_k = n$; так как $n-1 \geqslant 1$, то $k \geqslant 3$.

(Brazil 2014)