Многочлены — 2

Производная многочлена

1. Может ли многочлен $1 + {}^{x}\!/_{1!} + {}^{x^2}\!/_{2!} + \dots + {}^{x^n}\!/_{n!}$ иметь кратные корни?

2. Про многочлены Q и R известно, что $\deg Q = \deg R = n$, $R(x_0) = Q(x_0)$, $R'(x_1) = Q'(x_1)$, ..., $R^{(n)}(x_n) = Q^{(n)}(x_n)$. Докажите, что $R(x) \equiv Q(x)$.

3. Многочлен степени n с действительными коэффициентами имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

4. При каких n многочлен $(x+1)^n + x^n + 1$ делится на $(x^2+x+1)^3$?

5. P – многочлен. Докажите, что $P(x) = 0$ и $\dfrac{P(x)}{(P(x), P'(x))} = 0$ равносильны.

6. Докажите, что корни производной $P'(z)$ многочлена $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ лежат внутри или на границе выпуклой оболочки корней $P(z)$.

Формулы Виета

7. Через значения многочлена $P(x)$ в конкретных точках выразите сумму коэффициентов при

(а) всех **(б)** всех $\vdots 2$ **(в)** всех $\not\vdots 2$ **(г)** всех $\vdots 4$ **(д)** всех $\vdots 3$

степенях переменной в этом многочлене.

8. Докажите, что корни x_1, x_2, x_3 уравнения $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta = 0$ (причем $\alpha, \beta \neq 0$) удовлетворяют соотношению $(x_1 + x_2 + x_3)\left({}^{1}\!/_{x_1} + {}^{1}\!/_{x_2} + {}^{1}\!/_{x_3}\right) = -1$.

9. Числа x, y, z удовлетворяют системе $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a, \\ {}^{1}\!/_{x} + {}^{1}\!/_{y} + {}^{1}\!/_{z} & = & {}^{1}\!/_{a} \end{array}\right.$. Докажите, что хотя бы одно из них равно a.

10. Решите систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a, \\ x^2+y^2+z^2 & = & a^2, \\ x^3+y^3+z^3 & = & a^3. \end{array}\right.$$

11. Решите при всех значениях n систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a, \\ x^2+y^2+z^2 & = & a^2, \\ x^3+y^3+z^3 & = & a^3, \\ & \dots & \\ x^n+y^n+z^n & = & a^n. \end{array}\right.$$

12. При каких $a \in \mathbb{R}$ система $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1, \\ x^2+y^2+z^2 & = & 1, \\ xyz & = & a. \end{array}\right.$ имеет решение $\in \mathbb{R}^3$?

Многочлены — 2

Производная многочлена

1. Может ли многочлен $1 + {}^{x}\!/_{1!} + {}^{x^2}\!/_{2!} + \dots + {}^{x^n}\!/_{n!}$ иметь кратные корни?

2. Про многочлены Q и R известно, что $\deg Q = \deg R = n$, $R(x_0) = Q(x_0)$, $R'(x_1) = Q'(x_1)$, ..., $R^{(n)}(x_n) = Q^{(n)}(x_n)$. Докажите, что $R(x) \equiv Q(x)$.

3. Многочлен степени n с действительными коэффициентами имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

4. При каких n многочлен $(x+1)^n + x^n + 1$ делится на $(x^2+x+1)^3$?

5. P – многочлен. Докажите, что $P(x) = 0$ и $\dfrac{P(x)}{(P(x), P'(x))} = 0$ равносильны.

6. Докажите, что корни производной $P'(z)$ многочлена $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ лежат внутри или на границе выпуклой оболочки корней $P(z)$.

Формулы Виета

7. Через значения многочлена $P(x)$ в конкретных точках выразите сумму коэффициентов при

(а) всех **(б)** всех $\vdots 2$ **(в)** всех $\not\vdots 2$ **(г)** всех $\vdots 4$ **(д)** всех $\vdots 3$

степенях переменной в этом многочлене.

8. Докажите, что корни x_1, x_2, x_3 уравнения $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta = 0$ (причем $\alpha, \beta \neq 0$) удовлетворяют соотношению $(x_1+x_2+x_3)\left({}^{1}\!/_{x_1} + {}^{1}\!/_{x_2} + {}^{1}\!/_{x_3}\right) = -1$.

9. Числа x, y, z удовлетворяют системе $\begin{cases} x+y+z &= a, \\ {}^{1}\!/_{x} + {}^{1}\!/_{y} + {}^{1}\!/_{z} &= {}^{1}\!/_{a} \end{cases}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно a.

10. Решите систему

$$\begin{cases} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2, \\ x^3+y^3+z^3 &= a^3. \end{cases}$$

11. Решите при всех значениях n систему

$$\begin{cases} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2, \\ x^3+y^3+z^3 &= a^3, \\ & \dots \\ x^n+y^n+z^n &= a^n. \end{cases}$$

12. При каких $a \in \mathbb{R}$ система $\begin{cases} x+y+z &= 1, \\ x^2+y^2+z^2 &= 1, \\ xyz &= a. \end{cases}$ имеет решение $\in \mathbb{R}^3$?