

# Многочлены — 1

## Делимость и корни

1. При каком  $c$  многочлен  $x^3 + cx - 10$  делится на  $x - 2$ ?
2. Разложите на множители многочлен  $x^4 + 1$   
(а) в  $\mathbb{R}$ ; (б) в  $\mathbb{C}$ .
3. При каких  $a, b$  многочлен  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$  делится на  $x^2 - 3x + 2$ ?
4. При каких  $c$  многочлены  $x^4 + cx^2 + 1$  и  $x^3 + cx + 1$  имеют общий корень?
5. Разложите на множители многочлен  $x^{10} + x^5 + 1$   
(а) в  $\mathbb{R}$ ; (б) в  $\mathbb{C}$ .
6. При каких  $n$  многочлен  $(x + 1)^n + x^n + 1$  делится на  $x^2 + x + 1$ ?

### Определение.

Число  $\alpha$  является корнем  $P$  кратности  $k$ , если

$$P(x) : (x - \alpha)^k, \quad P(x) \not\vdash (x - \alpha)^{k+1}.$$

7. Каковы кратности корней многочлена  $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ ?
8. Докажите, что при  $n > 0$  многочлен  $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$  имеет кратный корень.
9. При каких  $n > 0$  многочлен  $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$  имеет хотя бы один корень кратности хотя бы 3?

Многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  корней (с учетом кратностей).

10. Многочлены  $f$  и  $g$  степени не выше  $n$  принимают равные значения в  $n + 1$  точке. Докажите, что эти многочлены равны.

11. Дано  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\Gamma_P$  — график многочлена  $P$ . Найдите

$$\max_{P, \ell} |\Gamma_P \cap \ell|,$$

где максимум берется по всем многочленам  $P$  степени  $n$  и всем прямым  $\ell$ .

12.  $a, b, c, d$  — попарно различные числа. Решите уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-c)(x-a)(x-d)}{(b-c)(b-a)(b-d)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1.$$

13. Какими могут быть степень и коэффициенты многочлена  $Q$ , если известно, что  $Q(x + 4) = Q(x)$  при всех  $x$ ?

14. Найдите все  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ , такие что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad xP(x-1) = (x-2)P(x).$$

# Многочлены — 1

## Делимость и корни

1. При каком  $c$  многочлен  $x^3 + cx - 10$  делится на  $x - 2$ ?
2. Разложите на множители многочлен  $x^4 + 1$   
(а) в  $\mathbb{R}$ ; (б) в  $\mathbb{C}$ .
3. При каких  $a, b$  многочлен  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$  делится на  $x^2 - 3x + 2$ ?
4. При каких  $c$  многочлены  $x^4 + cx^2 + 1$  и  $x^3 + cx + 1$  имеют общий корень?
5. Разложите на множители многочлен  $x^{10} + x^5 + 1$   
(а) в  $\mathbb{R}$ ; (б) в  $\mathbb{C}$ .
6. При каких  $n$  многочлен  $(x + 1)^n + x^n + 1$  делится на  $x^2 + x + 1$ ?

### Определение.

Число  $\alpha$  является корнем  $P$  кратности  $k$ , если

$$P(x) : (x - \alpha)^k, \quad P(x) \not\vdash (x - \alpha)^{k+1}.$$

7. Каковы кратности корней многочлена  $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ ?
8. Докажите, что при  $n > 0$  многочлен  $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$  имеет кратный корень.
9. При каких  $n > 0$  многочлен  $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$  имеет хотя бы один корень кратности хотя бы 3?

Многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  корней (с учетом кратностей).

10. Многочлены  $f$  и  $g$  степени не выше  $n$  принимают равные значения в  $n + 1$  точке. Докажите, что эти многочлены равны.

11. Дано  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\Gamma_P$  — график многочлена  $P$ . Найдите

$$\max_{P, \ell} |\Gamma_P \cap \ell|,$$

где максимум берется по всем многочленам  $P$  степени  $n$  и всем прямым  $\ell$ .

12.  $a, b, c, d$  — попарно различные числа. Решите уравнение

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-c)(x-a)(x-d)}{(b-c)(b-a)(b-d)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1.$$

13. Какими могут быть степень и коэффициенты многочлена  $Q$ , если известно, что  $Q(x + 4) = Q(x)$  при всех  $x$ ?

14. Найдите все  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ , такие что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad xP(x - 1) = (x - 2)P(x).$$