

Комплексные числа — 2

1. Вычислите

$$\begin{array}{lll} \text{(а)} & (1+i)^n; & \text{(б)} & (1+i\sqrt{3})^n; & \text{(в)} & (1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n; \\ \text{(г)} & \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}; & \text{(д)} & \left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{20}; & \text{(е)} & \left(\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}\right)^n. \end{array}$$

2. Найдите значение $P(z) = z^2 - z + 1$ в

$$\text{(а)} \quad z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{(б)} \quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Перечислите все элементы множества $S = \left\{i^k + \frac{1}{i^k}, k \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Пусть

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Найдите $f(2014) + f(2015)$.

5. Решите

$$\text{(а)} \quad z^7 + z^6 + \dots + z + 1 = 0; \quad \text{(б)} \quad z^5 = i.$$

6. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, причем $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Докажите, что $z_1 = \overline{z_2}$.

7. Решите уравнения

$$\text{(а)} \quad |z-1| = |z-i|. \quad \text{(б)} \quad |z-1| + |z-i| = \sqrt{2}.$$

8. Решите уравнение $z - |z| = 1 + 2i$.

9. Найдите $\min |z|$, если $|z+4-3i| = 1$.

10. Докажите, что

$$\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1, z \neq -1.$$

11. Докажите, что точка z лежит на одной прямой с точками z_1 и z_2 , если и только если

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}.$$

12. Докажите, что четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4} \in \mathbb{R}.$$

Комплексные числа — 2

1. Вычислите

$$\begin{array}{lll} \text{(а)} & (1+i)^n; & \text{(б)} & (1+i\sqrt{3})^n; & \text{(в)} & (1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n; \\ \text{(г)} & \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}; & \text{(д)} & \left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{20}; & \text{(е)} & \left(\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi+i\sin\psi}\right)^n. \end{array}$$

2. Найдите значение $P(z) = z^2 - z + 1$ в

$$\text{(а)} \quad z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{(б)} \quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Перечислите все элементы множества $S = \left\{i^k + \frac{1}{i^k}, k \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Пусть

$$f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Найдите $f(2014) + f(2015)$.

5. Решите

$$\text{(а)} \quad z^7 + z^6 + \dots + z + 1 = 0; \quad \text{(б)} \quad z^5 = i.$$

6. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, причем $z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$. Докажите, что $z_1 = \overline{z_2}$.

7. Решите уравнения

$$\text{(а)} \quad |z-1| = |z-i|. \quad \text{(б)} \quad |z-1| + |z-i| = \sqrt{2}.$$

8. Решите уравнение $z - |z| = 1 + 2i$.

9. Найдите $\min |z|$, если $|z+4-3i| = 1$.

10. Докажите, что

$$\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1, z \neq -1.$$

11. Докажите, что точка z лежит на одной прямой с точками z_1 и z_2 , если и только если

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}.$$

12. Докажите, что четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4} \in \mathbb{R}.$$