

Комплексные числа — 1

Определение. *Сопряженным*

к комплексному числу $z = x + iy$ называется комплексное число $\bar{z} = x - iy$.

1. Как выражаются $|\bar{z}|$ и $\arg \bar{z}$ через $|z|$ и $\arg z$?

2. Докажите, что $\forall z \in \mathbb{C}$

$$(a) z + \bar{z} \in \mathbb{R}, \quad (б) z - \bar{z} \in \mathbb{R} \cdot i, \quad (в) z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

3. Докажите, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

4. Докажите *неравенство треугольника*:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Когда оно обращается в равенство?

5. Докажите *тождество параллелограмма*:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

6. Представьте в тригонометрической форме числа

$$(a) 1 + i; \quad (б) 2 + \sqrt{3} + i;$$

$$(в) 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi; \quad (г) \sin(\pi/6) + i \sin(\pi/6); \quad (д) \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}.$$

7. Решите в \mathbb{C} :

$$(a) z^2 + z + 1 = 0; \quad (б) z^2 - (2+i)z + 2i = 0; \quad (в) z^2 - (3+2i)z + 6i = 0.$$

8. Пусть $|x| = |y| = |z| = 1$. Докажите, что

$$(a) |x + y + z| = |xy + yz + zx|; \quad (б) \frac{xyz}{((x+y)(y+z)(z+x))} \in \mathbb{R}.$$

9. Решите уравнения

$$(a) z^4 = \bar{z}^4; \quad (б) z^2 + |z| = 0; \quad (в) z^2 + \bar{z} = 0; \\ (г) z^2 + |z|^2 = 0; \quad (д) (z+i)^4 = (z-i)^4; \quad (е) z^3 - \bar{z} = 0.$$

Комплексные числа — 1

Определение. *Сопряженным*

к комплексному числу $z = x + iy$ называется комплексное число $\bar{z} = x - iy$.

1. Как выражаются $|\bar{z}|$ и $\arg \bar{z}$ через $|z|$ и $\arg z$?

2. Докажите, что $\forall z \in \mathbb{C}$

$$(a) \quad z + \bar{z} \in \mathbb{R}, \quad (б) \quad z - \bar{z} \in \mathbb{R} \cdot i, \quad (в) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

3. Докажите, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

4. Докажите *неравенство треугольника*:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Когда оно обращается в равенство?

5. Докажите *тождество параллелограмма*:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

6. Представьте в тригонометрической форме числа

$$(a) \quad 1 + i; \quad (б) \quad 2 + \sqrt{3} + i;$$

$$(в) \quad 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi; \quad (г) \quad \sin(\pi/6) + i \sin(\pi/6); \quad (д) \quad \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}.$$

7. Решите в \mathbb{C} :

$$(a) \quad z^2 + z + 1 = 0; \quad (б) \quad z^2 - (2+i)z + 2i = 0; \quad (в) \quad z^2 - (3+2i)z + 6i = 0.$$

8. Пусть $|x| = |y| = |z| = 1$. Докажите, что

$$(a) \quad |x + y + z| = |xy + yz + zx|; \quad (б) \quad \frac{xyz}{((x+y)(y+z)(z+x))} \in \mathbb{R}.$$

9. Решите уравнения

$$(a) \quad z^4 = \bar{z}^4; \quad (б) \quad z^2 + |z| = 0; \quad (в) \quad z^2 + \bar{z} = 0; \\ (г) \quad z^2 + |z|^2 = 0; \quad (д) \quad (z+i)^4 = (z-i)^4; \quad (е) \quad z^3 - \bar{z} = 0.$$