Множества — 3

1. Пусть $|M| = \mu$. 2^M обозначает множество всех подмножеств множества M. Чему, кстати, равно $|2^M|$?

На 2^M определено отношение эквивалентности $\sim$: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

(а) Сколько классов эквивалентности?

(б) Каков размер наибольшего класса?

На 2^M определено отношение порядка $\subset$ («быть подмножеством»).

(в) Какова длина максимальной цепи?

(г) Каков размер максимальной антицепи?

Определение.

Два бесконечных множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие R:

$\exists R \subset A \times B$, т.ч. $\forall a \in A \quad \exists! b \in B (a, b) \in R$, $\forall b \in B \exists! a \in A (a, b) \in R$.

Пишут: $A \sim B$.

2. Докажите, что

(а) $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$; **(б)** $\{\text{Нечетные}\} \sim \mathbb{N}$; **(в)** $\mathbb{P} \sim \mathbb{N}$; **(г)** $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Определение.

Множества, равномощные $\mathbb{N}$, называют *счётными*.

3. Докажите, что

(а) $(0, 1) \sim \mathbb{R}$; **(б)** $[0, 1] \sim \mathbb{R}$; **(в)** $(0, +\infty) \sim \mathbb{R}$.

Определение.

Множества, равномощные $\mathbb{R}$, называют *континуальными* либо говорят, что они *имеют мощность континуум*.

4. Докажите, что $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$.

5. Докажите, что в $\forall$ бесконечном множестве найдется счетное подмножество.

6. Докажите, что, если к бесконечному множеству добавить конечное число элементов, оно не поменяет свою мощность.

7. Докажите, что $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

8. Докажите, что никакое множество не равномощно множеству всех своих подмножеств (попросту говоря, $M \not\sim 2^M$).

9. Докажите, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

10. Докажите, что $[0, 1) \sim [0, 1)^2$. (Т.е. квадрат равномощен отрезку.)

11. Докажите, что равномощность является отношением эквивалентности на множествах.

12. Докажите, что $\exists$ бесконечное множество, не равномощное ни $\mathbb{N}$, ни $\mathbb{R}$.

Множества — 3

1. Пусть $|M| = \mu$. 2^M обозначает множество всех подмножеств множества M. Чему, кстати, равно $|2^M|$?

На 2^M определено отношение эквивалентности $\sim$: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

(а) Сколько классов эквивалентности?

(б) Каков размер наибольшего класса?

На 2^M определено отношение порядка $\subset$ («быть подмножеством»).

(в) Какова длина максимальной цепи?

(г) Каков размер максимальной антицепи?

Определение.

Два бесконечных множества A и B называются *равномощными*, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие R:

$\exists R \subset A \times B$, т.ч. $\forall a \in A \quad \exists! b \in B (a, b) \in R$, $\forall b \in B \exists! a \in A (a, b) \in R$.

Пишут: $A \sim B$.

2. Докажите, что

(а) $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$; **(б)** $\{\text{Нечетные}\} \sim \mathbb{N}$; **(в)** $\mathbb{P} \sim \mathbb{N}$; **(г)** $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Определение.

Множества, равномощные $\mathbb{N}$, называют *счётными*.

3. Докажите, что

(а) $(0, 1) \sim \mathbb{R}$; **(б)** $[0, 1] \sim \mathbb{R}$; **(в)** $(0, +\infty) \sim \mathbb{R}$.

Определение.

Множества, равномощные $\mathbb{R}$, называют *континуальными* либо говорят, что они *имеют мощность континуум*.

4. Докажите, что $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$.

5. Докажите, что в $\forall$ бесконечном множестве найдется счетное подмножество.

6. Докажите, что, если к бесконечному множеству добавить конечное число элементов, оно не поменяет свою мощность.

7. Докажите, что $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

8. Докажите, что никакое множество не равномощно множеству всех своих подмножеств (попросту говоря, $M \not\sim 2^M$).

9. Докажите, что $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

10. Докажите, что $[0, 1) \sim [0, 1)^2$. (Т.е. квадрат равномощен отрезку.)

11. Докажите, что равномощность является отношением эквивалентности на множествах.

12. Докажите, что $\exists$ бесконечное множество, не равномощное ни $\mathbb{N}$, ни $\mathbb{R}$.