Множества — 2

1. Пусть $|M| = \mu$. Сколько на M отношений, которые одновременно симметричны и антисимметричны?

Определение.
Отношение R на M называется *транзитивным*, если

$$\forall a, b, c \in M \quad aRb \,\&\, bRc \Longrightarrow aRc.$$

2. Транзитивно ли отношение $\subset$ (*«быть подмножеством»*) на семействе всех подмножеств непустого множества M?

3. Докажите, что если отношение одновременно симметрично и антисимметрично, то оно транзитивно.

4. Какими из свойств (р., с., а., т.) обладает отношение R: $\quad a\ R\ b \Leftrightarrow a^2 = b^2$?

Определение.
Отношение, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется *отношением эквивалентности.*

5. Пусть отношение R на $\mathbb{R}$ задано условием: $a\ R\ b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. Докажите, что R — отношение эквивалентности.

6. Пусть на множестве M дано отношение эквивалентности $\sim$. Класс эквивалентности элемента x — это множество $C_x = \{y \in M | x \sim y\}$. Докажите, что множество M разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, т.е. что каждый элемент принадлежит ровно одному классу.

7. Пусть множество M представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств M_i ($i \in I$ — некое множество индексов). Докажите, что отношение $x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in I\ x, y \in M_i$ является отношением эквивалентности. (Говоря проще, разбиение множества M задает отношение эквивалентности.)

Определение.
Отношение, которое одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, называется *отношением порядка.*

8. Пусть отношение R на $\mathbb{Q}$ задано условием: $a\ R\ b \Leftrightarrow a = b$ либо числитель неприводимой дроби, равной a/b, делится на 7. Докажите, что R — отношение порядка.

9. Пусть на M дано отношение порядка $\prec$. Подмножество $L \subset M$, такое что $\forall x, y \in L \quad x \prec y \vee y \prec x$, называется *цепью.* Подмножество $A \subset M$, такое что $\forall x, y \in A\ x \not\prec y$, называется *антицепью.* Пусть M покрывается n цепями. Докажите, что длина любой антицепи не превосходит n.

10. Опишите на множестве $\{a, b, c, d, e\}$

(а) все отношения эквивалентности (с точностью до переобозначений);

(б) все отношения порядка (с точностью до переобозначений).

Множества — 2

1. Пусть $|M| = \mu$. Сколько на M отношений, которые одновременно симметричны и антисимметричны?

Определение.
Отношение R на M называется *транзитивным*, если

$$\forall a, b, c \in M \quad aRb \ \&\ bRc \Longrightarrow aRc.$$

2. Транзитивно ли отношение $\subset$ (*«быть подмножеством»*) на семействе всех подмножеств непустого множества M?

3. Докажите, что если отношение одновременно симметрично и антисимметрично, то оно транзитивно.

4. Какими из свойств (р., с., а., т.) обладает отношение R: $\;a\ R\ b \Leftrightarrow a^2 = b^2$?

Определение.
Отношение, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется *отношением эквивалентности.*

5. Пусть отношение R на $\mathbb{R}$ задано условием: $a\ R\ b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. Докажите, что R — отношение эквивалентности.

6. Пусть на множестве M дано отношение эквивалентности $\sim$. Класс эквивалентности элемента x — это множество $C_x = \{y \in M | x \sim y\}$. Докажите, что множество M разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, т.е. что каждый элемент принадлежит ровно одному классу.

7. Пусть множество M представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств M_i ($i \in I$ — некое множество индексов). Докажите, что отношение $x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in I\ x, y \in M_i$ является отношением эквивалентности. (Говоря проще, разбиение множества M задает отношение эквивалентности.)

Определение.
Отношение, которое одновременно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, называется *отношением порядка.*

8. Пусть отношение R на $\mathbb{Q}$ задано условием: $a\ R\ b \Leftrightarrow a = b$ либо числитель неприводимой дроби, равной a/b, делится на 7. Докажите, что R — отношение порядка.

9. Пусть на M дано отношение порядка $\prec$. Подмножество $L \subset M$, такое что $\forall x, y \in L \quad x \prec y \vee y \prec x$, называется *цепью.* Подмножество $A \subset M$, такое что $\forall x, y \in A\ x \not\prec y$, называется *антицепью.* Пусть M покрывается n цепями. Докажите, что длина любой антицепи не превосходит n.

10. Опишите на множестве $\{a, b, c, d, e\}$

(а) все отношения эквивалентности (с точностью до переобозначений);

(б) все отношения порядка (с точностью до переобозначений).