Множества — 1

1. Докажите, что $B \subset A$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = B$.

2. Докажите верные и опровергните неверные утверждения вида

$$A \star (B * C) = (A \star B) * (A \star C),$$

где $\star$ и $*$ могут быть: $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ ($4^2 = 16$ вариантов).

3. В множестве M содержится ровно μ элементов (т.е. $|M| = \mu$), среди которых элемент m. Сколько существует подмножеств множества M, содержащих m, а сколько — не содержащих?

4. Пусть упорядоченная пара (a, b) определена как $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Докажите, что

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Определение. Напомним, что
отношением R на множестве M называется любое подмножество декартова квадрата M, т.е. $R \subset M \times M$. Чаще вместо $(a, b) \in R$ пишут aRb и говорят, что «a в отношении с b».

5. Пусть $|M| = \mu$, $m \in M$. Сколько существует отношений на множестве M, таких что m не в отношении сам с собой?

Определение.
Отношение R на M называется *рефлексивным*, если $\forall m \in M \; mRm$.

6. Сколько существует рефлексивных отношений на M, если $|M| = \mu$?

Определение.
Отношение R на M называется *симметричным*, если $\forall a, b \in M \quad aRb \Rightarrow bRa$.

7. Сколько существует симметричных отношений на M, если $|M| = \mu$?

Определение.
Отношение R на M называется *антисимметричным*, если $\forall a, b \in M, a \neq b$ не может отновременно быть и aRb и bRa.

8. Сколько существует антисимметричных отношений на M, если $|M| = \mu$?

9. Опишите все отношения, которые симметричны и антисимметричны одновременно. Сколько их, если $|M| = \mu$?

10. Укажите, какими указанными выше свойствами обладают известные отношения на числовых множествах: **(а)** $=$, **(б)** $<$, **(в)** $\vdots$, **(г)** $\equiv_m$.

11. Верно ли, что $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$? Если нет, то в какую сторону верно включение? Верно ли, что $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$?

12. Придумайте отношение на множестве $\mathbb{N}$, которое задается условием, использующим только арифметические операции и знак равенства $+, \cdot, -, :, =$, и не является ни рефлексивным, ни симметричным, ни антисимметричным.

Множества — 1

1. Докажите, что $B \subset A$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = B$.

2. Докажите верные и опровергните неверные утверждения вида
$$A \star (B * C) = (A \star B) * (A \star C),$$
где $\star$ и $*$ могут быть: $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ ($4^2 = 16$ вариантов).

3. В множестве M содержится ровно μ элементов (т.е. $|M| = \mu$), среди которых элемент m. Сколько существует подмножеств множества M, содержащих m, а сколько — не содержащих?

4. Пусть упорядоченная пара (a, b) определена как $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Докажите, что
$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Определение. Напомним, что
отношением R на множестве M называется любое подмножество декартова квадрата M, т.е. $R \subset M \times M$. Чаще вместо $(a, b) \in R$ пишут aRb и говорят, что «a в отношении с b».

5. Пусть $|M| = \mu$, $m \in M$. Сколько существует отношений на множестве M, таких что m не в отношении сам с собой?

Определение.
Отношение R на M называется *рефлексивным*, если $\forall m \in M \; mRm$.

6. Сколько существует рефлексивных отношений на M, если $|M| = \mu$?

Определение.
Отношение R на M называется *симметричным*, если $\forall a, b \in M \quad aRb \Rightarrow bRa$.

7. Сколько существует симметричных отношений на M, если $|M| = \mu$?

Определение.
Отношение R на M называется *антисимметричным*, если $\forall a, b \in M, a \neq b$ не может отновременно быть и aRb и bRa.

8. Сколько существует антисимметричных отношений на M, если $|M| = \mu$?

9. Опишите все отношения, которые симметричны и антисимметричны одновременно. Сколько их, если $|M| = \mu$?

10. Укажите, какими указанными выше свойствами обладают известные отношения на числовых множествах: **(а)** $=$, **(б)** $<$, **(в)** $\vdots$, **(г)** $\equiv_m$.

11. Верно ли, что $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$? Если нет, то в какую сторону верно включение? Верно ли, что $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$?

12. Придумайте отношение на множестве $\mathbb{N}$, которое задается условием, использующим только арифметические операции и знак равенства $+, \cdot, -, :, =$, и не является ни рефлексивным, ни симметричным, ни антисимметричным.