Комбинаторика и теория чисел

Зачет по программе осеннего полугодия 11 класса

1. Множества.

Даны множества A, B, C. Пусть

$$X = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A), \quad Y = ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \backslash (A \cap B \cap C).$$

Всегда ли верно, что

(а) $X \subset Y$? **(б)** $X \supset Y$? **(в)** $X = Y$?

Если ответ «да» — докажите, если «нет» — приведите контрпример.

2. Мощность множеств.

На плоскости лежит некоторое количество непересекающихся восьмерок (они же знаки бесконечности, ∞). Докажите, что их не более чем счетное количество.

3. Комплексные числа.

Решите в $\mathbb{C}$ уравнение

$$z + |z| - 1 + i = 0.$$

4. Индукция.

В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

5. Многочлены.

Про многочлен

$$f(x) = x^{10} + a_9 x^9 + \ldots + a_0$$

известно, что $f(1) = f(-1)$, ..., $f(5) = f(-5)$. Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x.

6. Многочлены и комплексные числа.

Докажите, что если корни многочлена

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

образуют правильный треугольник на комплексной плоскости, то многочлен

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

имеет двукратный корень, расположенный в центре этого треугольника.

Комбинаторика и теория чисел

Зачет по программе осеннего полугодия 11 класса

1. Множества.

Даны множества A, B, C. Пусть

$$X = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A), \quad Y = ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)) \setminus (A \cap B \cap C).$$

Всегда ли верно, что

(а) $X \subset Y$? **(б)** $X \supset Y$? **(в)** $X = Y$?

Если ответ «да» — докажите, если «нет» — приведите контрпример.

2. Мощность множеств.

На плоскости лежит некоторое количество непересекающихся восьмерок (они же знаки бесконечности, ∞). Докажите, что их не более чем счетное количество.

3. Комплексные числа.

Решите в $\mathbb{C}$ уравнение

$$z + |z| - 1 + i = 0.$$

4. Индукция.

В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Докажите, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

5. Многочлены.

Про многочлен

$$f(x) = x^{10} + a_9 x^9 + \ldots + a_0$$

известно, что $f(1) = f(-1)$, ..., $f(5) = f(-5)$. Докажите, что $f(x) = f(-x)$ для любого действительного x.

6. Многочлены и комплексные числа.

Докажите, что если корни многочлена

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

образуют правильный треугольник на комплексной плоскости, то многочлен

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

имеет двукратный корень, расположенный в центре этого треугольника.