Делимость — 1

Основная теорема арифметики

1. Докажите, что произведение любых 5 подряд идущих натуральных чисел делится на 120.

2. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

3. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

4. Может ли $n!$ оканчиваться на 5 нулей?

5. Сколько делителей у числа $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k$?

6. В ряду 100 лампочек, каждая может гореть или не гореть. Возле каждой лампочки есть её индивидуальный переключатель, изначально все лампочки выключены. Физик–экспериментатор проходит вдоль лампочек и меняет положение переключателя каждой из них по очереди. Затем возвращается к началу ряда и снова проходит вдоль всех лампочек, но на этот раз меняет положение переключателя каждой второй (первую пропускает). Затем возвращается к началу ряда и снова проходит вдоль всех лампочек, но на этот раз меняет положение переключателя (вкл на выкл и наоборот) каждой третьей (первые две пропускает). Так осуществляется 100 проходов (на последнем меняется положение переключателя только сотой лампочки). Что бы на это сказал физик–теоретик — как заранее предсказать, какие лампочки будут гореть в конце?

7. Докажите, что нечетное число, являющееся произведением n различных простых сомножителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.

8. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

9. Докажите, что число $N_k = (2k)!/k!$ делится на 2^k и не делится на 2^{k+1}.

10. Найдите все целые решения уравнения $y^k = x^2 + x$, где k — данное фиксированное натуральное число, большее 1.

11. В последовательности троек целых чисел (2,3,5), (6,15,10)... каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число умножается на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку. Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т.д.

12. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ верно $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$.

Делимость — 1

Основная теорема арифметики

1. Докажите, что произведение любых 5 подряд идущих натуральных чисел делится на 120.

2. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — квадрат, треть — куб, а пятая часть — пятая степень.

3. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

4. Может ли $n!$ оканчиваться на 5 нулей?

5. Сколько делителей у числа $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k$?

6. В ряду 100 лампочек, каждая может гореть или не гореть. Возле каждой лампочки есть её индивидуальный переключатель, изначально все лампочки выключены. Физик–экспериментатор проходит вдоль лампочек и меняет положение переключателя каждой из них по очереди. Затем возвращается к началу ряда и снова проходит вдоль всех лампочек, но на этот раз меняет положение переключателя каждой второй (первую пропускает). Затем возвращается к началу ряда и снова проходит вдоль всех лампочек, но на этот раз меняет положение переключателя (вкл на выкл и наоборот) каждой третьей (первые две пропускает). Так осуществляется 100 проходов (на последнем меняется положение переключателя только сотой лампочки). Что бы на это сказал физик–теоретик — как заранее предсказать, какие лампочки будут гореть в конце?

7. Докажите, что нечетное число, являющееся произведением n различных простых сомножителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.

8. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

9. Докажите, что число $N_k = (2k)!/k!$ делится на 2^k и не делится на 2^{k+1}.

10. Найдите все целые решения уравнения $y^k = x^2 + x$, где k — данное фиксированное натуральное число, большее 1.

11. В последовательности троек целых чисел (2,3,5), (6,15,10)... каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число умножается на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку. Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т.д.

12. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ верно НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = ab$.