

Комбинаторные подсчеты — 2

Свойства чисел сочетания

1. Докажите: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$; $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$.

2. Докажите: (а) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; (б) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

3. Докажите: (а) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$; (б) $(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}$.

4. Докажите:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor - 1} < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

5. Докажите: $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m-k} \binom{n-m+k}{k}$;

6. **Свертка Ван дер Монда.** Докажите: $\sum_k \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

7. Вычислите $\sum_{k:2} \binom{n}{k}$.

8. Вычислите $\sum_k k \binom{n}{k}$.

9. Докажите, что $\sum_k \binom{n-m}{k} (-1)^k = \binom{m}{n}$.

Комбинаторные подсчеты — 2

Свойства чисел сочетания

1. Докажите: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$; $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$.

2. Докажите: (а) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; (б) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

3. Докажите: (а) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$; (б) $(n-k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k}$.

4. Докажите:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor - 1} < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \binom{n}{\lceil n/2 \rceil + 1} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

5. Докажите: $\binom{n}{m} \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m-k} \binom{n-m+k}{k}$;

6. **Свертка Ван дер Монда.** Докажите: $\sum_k \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

7. Вычислите $\sum_{k:2} \binom{n}{k}$.

8. Вычислите $\sum_k k \binom{n}{k}$.

9. Докажите, что $\sum_k \binom{n-m}{k} (-1)^k = \binom{m}{n}$.