

Логика — 2

\forall — *квантор всеобщности*, означает «для каждого», «для всякого», «для любого», либо просто «каждый», «всякий», «любой», ...

\exists — *квантор существования*, означает «существует», «найдется», ...

1. Не является общепринятым, но используется квантор $\exists!$ — «существует единственный», «найдется ровно один»... Запишите его (точнее, предложение $(\exists!x)\varphi(x)$) с помощью стандартных кванторов \exists и \forall .

2. Запишите с помощью кванторов и логических операций утверждения:

(а) «Между любыми двумя рациональными числами найдется еще хотя бы одно рациональное число»;

(б) «Некоторые треугольники прямоугольные, некоторые равносторонние, но также есть те, которые не относятся ни к одному из этих типов»;

(в) «Каждое четное число равно сумме двух простых чисел».

3. Верны ли следствия (докажите либо приведите контрпример):

(а) $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)$, (б) $(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)$?

4. Равносильны ли утверждения $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y)$ и $(\exists y)(\forall x)\varphi(x, y)$? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

5. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было написано 100 следующих утверждений:

«В этой тетради ровно 1 неверное утверждение.»

«В этой тетради ровно 2 неверных утверждения.»

.....

«В этой тетради ровно 100 неверных утверждений.»

Сколько среди этих утверждений верных?

6. Объясните: (а) $\neg(\exists x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$; (б) $\neg(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$.

7. Пусть $\neg\varphi_i(x) = \psi_i(x)$ ($i = 1, 2$). Постройте отрицания следующих предложений, не содержащие символа \neg :

(а) $(\forall x)(\varphi_1(x) \Rightarrow \varphi_2(x))$; (б) $(\exists x)(\varphi_1(x) \Rightarrow \varphi_2(x))$.

8. Запишите следующие утверждения с помощью кванторов. Затем запишите его отрицание по-русски и по-математически.

(а) На турнире каждый участник каждой команды в каждом туре решил по крайней мере одну задачу.

(б) В каждой команде был хотя бы один участник, решивший в каком-нибудь туре не менее 3 задач.

9. Постройте отрицания следующих предложений, не содержащие символа \neg :

(а) $(A \vee \neg B) \& ((\neg C \vee B) \vee \neg(C \& \neg B)) \& (\neg A \vee D)$;

(б) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z})((y : x) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q})((z = x/y) \& (\exists n \in \mathbb{N})(nz \in \mathbb{Z})))$.

Логика — 2

\forall — *квантор всеобщности*, означает «для каждого», «для всякого», «для любого», либо просто «каждый», «всякий», «любой», ...

\exists — *квантор существования*, означает «существует», «найдется», ...

1. Не является общепринятым, но используется квантор $\exists!$ — «существует единственный», «найдется ровно один»... Запишите его (точнее, предложение $(\exists!x)\varphi(x)$) с помощью стандартных кванторов \exists и \forall .

2. Запишите с помощью кванторов и логических операций утверждения:

(а) «Между любыми двумя рациональными числами найдется еще хотя бы одно рациональное число»;

(б) «Некоторые треугольники прямоугольные, некоторые равносторонние, но также есть те, которые не относятся ни к одному из этих типов»;

(в) «Каждое четное число равно сумме двух простых чисел».

3. Верны ли следствия (докажите либо приведите контрпример):

(а) $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)$, (б) $(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)$?

4. Равносильны ли утверждения $(\forall x)(\exists y)\varphi(x, y)$ и $(\exists y)(\forall x)\varphi(x, y)$? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

5. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было написано 100 следующих утверждений:

«В этой тетради ровно 1 неверное утверждение.»

«В этой тетради ровно 2 неверных утверждения.»

.....

«В этой тетради ровно 100 неверных утверждений.»

Сколько среди этих утверждений верных?

6. Объясните: (а) $\neg(\exists x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$; (б) $\neg(\forall x)\varphi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$.

7. Пусть $\neg\varphi_i(x) = \psi_i(x)$ ($i = 1, 2$). Постройте отрицания следующих предложений, не содержащие символа \neg :

(а) $(\forall x)(\varphi_1(x) \Rightarrow \varphi_2(x))$; (б) $(\exists x)(\varphi_1(x) \Rightarrow \varphi_2(x))$.

8. Запишите следующие утверждения с помощью кванторов. Затем запишите его отрицание по-русски и по-математически.

(а) На турнире каждый участник каждой команды в каждом туре решил по крайней мере одну задачу.

(б) В каждой команде был хотя бы один участник, решивший в каком-нибудь туре не менее 3 задач.

9. Постройте отрицания следующих предложений, не содержащие символа \neg :

(а) $(A \vee \neg B) \& ((\neg C \vee B) \vee \neg(C \& \neg B)) \& (\neg A \vee D)$;

(б) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{Z})((y : x) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q})((z = x/y) \& (\exists n \in \mathbb{N})(nz \in \mathbb{Z})))$.