Пути и циклы

1. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами?

2. Докажите, что ребро является мостом тогда и только тогда, когда нет простого цикла, его содержащего.

(*Мостом* называется ребро, удаление которого ведет к увеличению количества компонент связности графа.)

3. Докажите, что в дереве есть самое меньшее 2 висячие вершины.

4. В марсианском метро 100 станций. От любой станции до любой другой можно проехать. Забастовочный комитет хочет закрыть проезд через одну из станций так, чтобы между всеми остальными станциями был возможен проезд. Докажите, что такая станция найдётся.

5. Даны три условия. Докажите, что из любых двух следует третье.

(i) В графе нет циклов. **(ii)** Граф связный. **(iii)** $\text{Р} = \text{В} - 1$.

6. Клетчатая плоскость раскрашена десятью красками так, что соседние (т. е. имеющие общую сторону) клетки покрашены в разные цвета, причём все десять красок использованы. Каково минимально возможное число пар соседних красок?

7. На планете 100 государств, некоторые из которых соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что из любого государства можно попасть в любое другое (возможно, с пересадками). Докажите, что можно совершить путешествие по всем странам, сделав не более 196 перелетов.

8. Каждый из 300 депутатов ударил ровно одного из своих коллег. Докажите, что можно выбрать 100 депутатов, среди которых никто никого не бил.

9. В некоторой стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением.

(а) Докажите, что найдётся город, из которого можно доехать до любого другого. Более того, докажите, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.

(б) Докажите, что найдутся два города, такие что из первого можно проехать во второй, побывав в каждом городе ровно один раз.

(в) Оказалось, что из любого города можно хоть как-нибудь проехать в любой другой. Докажите, что все города страны можно объехать, побывав в каждом ровно один раз и вернувшись в конце в исходный город.

10. Надо расставить стрелки на ребрах ориентированного графа на n вершинах так, чтобы никакие три ребра не образовывали ориентированный цикл. Сколькими способами это можно сделать?