Диофантовы уравнения

Линейные

1. Решите в целых числах уравнение $5x + 3y = 7$.

2. При каких $a, b \in \mathbb{Z}$ система $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ bx + 3y = 1 \end{cases}$ имеет целочисленное решение $x, y \in \mathbb{Z}$?

3. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $ax + by = c - 2a - 3b$.

4. Решите диофантово уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

5. Докажите, что если $(a, b, c) = 1$, то уравнение $ax + by + cz = 1$ разрешимо в целых числах x, y, z.

6. Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что $28a+30b+31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

7. Теорема Сильвестра. Докажите, что наибольшее c, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c = ab - a - b$.

Нелинейные

8. Метод остатков. Докажите, что уравнения не имеют решений в $\mathbb{Z}$:

(а) $x^2+y^2 = 2015$; **(б)** $a^2-3b^2 = 8$; **(в)** $m^2 = 4k+2+n^2$; **(г)** $n^3+2 = 9k$;
(д) $15x^2 - 7y^2 = 9$; **(е)** $12x + 5 = y^2$; **(ж)** $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$;
(з) $19x^3-84y^2 = 1984$; **(и)** $x^2+y^2+z^2 = 2015$; **(к)** $x_1^4+\ldots+x_{14}^4 = 2015$.

9. Метод разложения. Решите в $\mathbb{Z}$, если не указано иначе:

(а) $xy + 2x = 7$; **(б)** $xy + 3y - 5x = 18$; **(в)** $x^2 - y^2 = 12$;
(г) $5p + 1 = k^2$ $(k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$; **(д)** $3p + 1 = k^3$ $(k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$;
(е) $p = n^4 + 4$ $(n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$; **(ж)** $k^3 - 3k = p - 2$ $(k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$;
(з) $n^2 + 3n + 24 = m^2$; **(и)** $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$;
(к) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 6$; **(л)** $y^4 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$;
(м) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 7x + 5 = y^2$ **(н)** $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$.

10. Метод оценок. Решите:

(а) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ в $\mathbb{N}$ и отдельно в $\mathbb{Z}$; **(б)** $\begin{cases} a^3 + 6ab + 1 = n^3 \\ b^3 + 6ab + 1 = m^3 \end{cases}$ в $\mathbb{N}$;

11. Метод спуска. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнения **(а)** $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$;
(б) $3^n = x^2 + y^2$; **(в)** $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$; **(г)** $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$.

12. Докажите, что уравнение $1/x - 1/y = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, имеет единственное решение $x, y \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{P}$.

13. Докажите, что $l^2 + m^2 = n^2 + 3$ имеет бесконечно много решений в $\mathbb{N}$.

Диофантовы уравнения

Линейные

1. Решите в целых числах уравнение $5x + 3y = 7$.

2. При каких $a, b \in \mathbb{Z}$ система $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ bx + 3y = 1 \end{cases}$ имеет целочисленное решение $x, y \in \mathbb{Z}$?

3. Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение $ax + by = c - 2a - 3b$.

4. Решите диофантово уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

5. Докажите, что если $(a, b, c) = 1$, то уравнение $ax + by + cz = 1$ разрешимо в целых числах x, y, z.

6. Пусть a, b, c — такие целые неотрицательные числа, что $28a+30b+31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

7. Теорема Сильвестра. Докажите, что наибольшее c, для которого уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, имеет вид $c = ab - a - b$.

Нелинейные

8. Метод остатков. Докажите, что уравнения не имеют решений в $\mathbb{Z}$:

(а) $x^2+y^2 = 2015$; **(б)** $a^2-3b^2 = 8$; **(в)** $m^2 = 4k+2+n^2$; **(г)** $n^3+2 = 9k$;
(д) $15x^2 - 7y^2 = 9$; **(е)** $12x + 5 = y^2$; **(ж)** $-x^2 + 7y^3 + 6 = 0$;
(з) $19x^3 - 84y^2 = 1984$; **(и)** $x^2+y^2+z^2 = 2015$; **(к)** $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4 = 2015$.

9. Метод разложения. Решите в $\mathbb{Z}$, если не указано иначе:

(а) $xy + 2x = 7$; **(б)** $xy + 3y - 5x = 18$; **(в)** $x^2 - y^2 = 12$;
(г) $5p + 1 = k^2$ $(k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$; **(д)** $3p + 1 = k^3$ $(k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$;
(е) $p = n^4 + 4$ $(n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$; **(ж)** $k^3 - 3k = p - 2$ $(k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P})$;
(з) $n^2 + 3n + 24 = m^2$; **(и)** $xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6$;
(к) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 6$; **(л)** $y^4 - x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 1$;
(м) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 7x + 5 = y^2$ **(н)** $x^2 - 5xy + 6y^2 = 3$.

10. Метод оценок. Решите:

(а) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ в $\mathbb{N}$ и отдельно в $\mathbb{Z}$; **(б)** $\begin{cases} a^3 + 6ab + 1 = n^3 \\ b^3 + 6ab + 1 = m^3 \end{cases}$ в $\mathbb{N}$;

11. Метод спуска. Решите в $\mathbb{Z}$ уравнения **(а)** $8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4$;
(б) $3^n = x^2+y^2$; **(в)** $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$; **(г)** $x^2+y^2+z^2+u^2 = 2xyzu$.

12. Докажите, что уравнение $1/x - 1/y = 1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, имеет единственное решение $x, y \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $n \in \mathbb{P}$.

13. Докажите, что $l^2 + m^2 = n^2 + 3$ имеет бесконечно много решений в $\mathbb{N}$.